1. 다음 중 다항식의 전개가 잘못된 것은?

① $(x+1)\left(x^2-x+1\right)=x^3+1$

② $(a+2b-3c)^2=a^2+4b^2+9c^2+4ab-12bc-6ac$

③ $(x+2)\left(x^2-2x+4\right)=x^3+8$

④ $\left(x^2-xy+y^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)=x^4-x^2y^2+y^4$

⑤ $(x-1)^2(x+1)^2=x^4-2x^2+1$

해설

④ $\left(x^2-xy+y^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)$
$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$
$=x^4+x^2y^2+y^4$

2. 다항식 $x^3 + ax + b$가 다항식 $x^2 - x + 1$로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
$x^2 = x - 1$을 대입하면
$ax + (b - 1) = 0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로,
$a = 0,\ b - 1 = 0$
$\therefore\ a = 0,\ b = 1$
$\therefore a + b = 1$

해설

$x^3 + ax + b$
$= (x^2 - x + 1)Q(x)$
$= (x^2 - x + 1)(x + b)$
$\therefore\ b = 1,\ a = 0$

3. $\dfrac{2-i}{2+i}+\dfrac{2+i}{2-i}$ 를 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① $\dfrac{6}{5}$ ② 2 ③ $\dfrac{8}{5}$ ④ $\dfrac{8}{3}$ ⑤ 3

해설

$$\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2-i)^2+(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}$$

$$=\frac{3+3}{5}=\frac{6}{5}$$

4. $x = 3 + \sqrt{3}i$, $y = 3 - \sqrt{3}i$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 10 ③ 20 ④ -10 ⑤ -20

해설

$x + y = 6, \quad xy = 12$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= 6^3 - 3 \cdot 12 \cdot 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

5. x에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2+2kx+k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $k-1 \neq 0$이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=k^2-(k-1)^2>0,\ 2k-1>0$$

$$\therefore k>\frac{1}{2}$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

6. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + b - 3 = 0$ 이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a = 1, b = 2$ ② $a = 0, b = 3$ ③ $a = -1, b = 2$

④ $a = 0, b = 2$ ⑤ $a = -1, b = 3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.

$D' = (k-a)^2 - (k^2 + b - 3) = 0$

$\Rightarrow \quad -2ak + a^2 - b + 3 = 0$

모든 k 에 대해 성립하려면

$-2a = 0,\ a^2 - b + 3 = 0$

$\therefore \quad a = 0, b = 3$

7. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore\ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow\quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
$\therefore$ ①이 조건에 맞다

8. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2+y^2=5$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

$\therefore\ xy=2$

9. 세 다항식 $A = x^2 + 3x - 2,\ B = 3x^2 - 2x + 1,\ C = 4x^2 + 2x - 3$ 에 대하여
$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$를 간단히 하면?

① $3x^2 + 12x - 13$
② $-3x^2 + 24x + 21$
③ $3x^2 - 12x + 21$
④ $-3x^2 - 24x + 21$
⑤ $x^2 + 12x + 11$

해설

$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$
$= -2A + 5B - 4C$
$= -2(x^2 + 3x - 2) + 5(3x^2 - 2x + 1) - 4(4x^2 + 2x - 3)$
$= -3x^2 - 24x + 21$

10. $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=5$, $a^3+b^3+c^3=2$일 때, abc의 값은?

① $-\frac{5}{3}$ ② 0 ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 1

해설

$a^2+b^2+c^2$

$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$이므로

$5=1-2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=-2$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$이므로

$2-3abc=1\cdot(5+2)$

$\therefore\ abc=-\frac{5}{3}$

11. 이차항의 계수가 1 인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$ 이고, 최소공배수가 x^3+x^2-2x 일 때, 두 다항식의 합은?

① $2x^2-2$ ② $2x^2+x+1$ ③ $2x^2+x-1$

④ $2x^2+x+2$ ⑤ $2x^2+x-2$

해설

최소공배수 : $x^3+x^2-2x = x(x-1)(x+2)$

최대공약수 : $(x-1)$

따라서 두 다항식은 $x^2-x, \quad x^2+x-2$

$\therefore \ 2x^2-2$

12. 이차방정식 $x^2+2x-a=0$의 해가 3 또는 b라 할 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해설

$x=3$이 $x^2+2x+a=0$의 근이므로

$3^2+2\cdot3-A=0 \quad \therefore a=15$

$\therefore a=15$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2+2x-15=0,\ (x+5)(x-3)=0$

따라서 $x=-5$ 또는 $x=3$이므로 $b=-5$

$\therefore a+b=15+(-5)=10$

13. $x^2-4kx+(5-k^2)=0$이 두 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$D/4=4k^2-(5-k^2)\geq 0$

$4k^2-5+k^2\geq 0$, $5k^2\geq 5$, $\therefore k^2\geq 1$

$\alpha+\beta=4k$, $\alpha\beta=5-k^2$

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &= 16k^2-10+2k^2 \\ &= 18k^2-10\end{aligned}$$

$18k^2\geq 18$, $18k^2-10\geq 18-10$

$\alpha^2+\beta^2\geq 8$, $\therefore$ (최솟값)$=8$

14. $A = \left\{x|x^2 + ax + b = 0\right\} = \{1, \alpha\}$,
$B = \left\{x|x^2 + bx + a = 0\right\} = \{-3, \beta\}$ 일 때,
α^2, β^2 을 두 근으로 하는 이차방정식의 두 근의 곱을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

(i) A 에서 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $1,\ \alpha$

$\therefore\ 1 + \alpha = -a,\ 1 \cdot \alpha = b \quad \cdots\cdots$ ㉠

B 에서 $x^2 + bx + a = 0$ 의 두 근이 $-3,\ \beta$

$\therefore\ -3 + \beta = -b,\ -3\beta = a \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a,\ b$를 소거하면

$1 + \alpha = 3\beta,\ \alpha = 3 - \beta \quad \therefore\ \alpha = 2,\ \beta = 1$

(ii) $\alpha^2 = 4,\ \beta^2 = 1$

$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0$

$\therefore\ x^2 - 5x + 4 = 0$

$\therefore$ 두 근의 곱은 4

15. 이차방정식 $(2-k)x^2+2kx+1=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖는 실수 k의 값의 범위는?

① $k<-2,\ k>1$　② $k<-2$　③ $k>0$

④ $k>2$　⑤ $k<2$

해설

서로 다른 부호의 실근을 갖기 위한 조건은

$\alpha\beta<0$이므로 $\dfrac{1}{2-k}<0$

$\therefore\ 2-k<0$

$\therefore\ 2<k$

16. 사차방정식 $2x^4+7x^2-4=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\dfrac{\beta}{\alpha}$의 값은?

① $1+i$ ② i ③ 0 ④ -1 ⑤ 24

해설

$2x^4+7x^2-4=0$에서 $x^2=t$라 하면

$2t^2+7t-4=0$, $(2t-1)(t+4)=0$

$\therefore\ t=\dfrac{1}{2}$ 또는 $t=-4$

$\therefore\ x=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ 또는 $x=\pm 2i$

이 때, α, β는 허근이므로

$\alpha=2i$, $\beta=-2i$ 또는 $\alpha=-2i$, $\beta=2i$

$\therefore\ \dfrac{\beta}{\alpha}=-1$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ ax-y=3 \end{cases}$ 의 해가 좌표평면의 제1사분면에 있기 위한 실수 a의 값의 범위는?

① $a > -1$ ② $a < -1$ ③ $a > \frac{3}{2}$

④ $a < \frac{3}{2}$ ⑤ $a > -2$

해설

$$\begin{cases} x+y=2 & \cdots ㉠ \\ ax-y=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ + ㉡에서 $(a+1)x=5$

$\therefore\ x = \frac{5}{a+1} \cdots\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $\frac{5}{a+1}+y=2$

$\therefore\ y = 2-\frac{5}{a+1}$

그런데 $x>0,\ y>0$이므로

$\frac{5}{a+1}>0,\ 2-\frac{5}{a+1}>0$에서,

$a > \frac{3}{2}$

18. $f(x) = 3x^3 - x + 2$ 일 때, $f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$이다. 이때, $A+B+C+D$의 값을 구하면 ?

① 4 ② 14 ③ 24 ④ 34 ⑤ 44

해설

$f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 에 $x = 1$ 을 대입하면

$f(2) = A + B + C + D$ 이므로

$f(2)$를 구하기 위해서는

$f(x) = 3x^3 - x + 2$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$f(2) = 3 \times 2^3 - 2 + 2 = 24$

해설

$x + 1 = t$ 라 하면,

$f(t) = A(t-1)^3 + B(t-1)^2 + C(t-1) + D$

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\
  &   & 3 & 3 & 2 \\
\hline
1 & 3 & 3 & 2 & \boxed{4} \\
  &   & 3 & 6 & \\
\hline
1 & 3 & 6 & \boxed{8} & \\
  &   & 3 & & \\
\hline
  & 3 & \boxed{9} & &
\end{array}
$$

$\therefore\ A = 3,\ B = 9,\ C = 8,\ D = 4$

$\therefore\ A + B + C + D = 24$

19. 다음 보기 중 $ab(b-a)+ac(c-a)+bc(2a-b-c)$의 인수인 것을 모두 고르면?

㉠ $a-b$	㉡ $b+c$	㉢ $a-c$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉢　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$\begin{aligned}
&ab(b-a)+ac(c-a)+bc(2a-b-c)\\
&=ab^2-a^2b+ac^2-a^2c+2abc-b^2c-bc^2\\
&=-(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a-bc(b+c)\\
&=-(b+c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\
&=-(b+c)(a-b)(a-c)\\
&=(a-b)(b+c)(c-a)
\end{aligned}$$

20. 두 다항식 $x^2 - 3x + a$와 $x^2 + bx - 6$의 최대공약수가 $x - 1$일 때, 두 다항식의 최소공배수를 $f(x)$라 하자. 이 때, $f(x)$를 $x - 2$로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2 - 3x + a, x^2 + bx - 6$은

$(x - 1)$을 인수로 가지므로 $a = 2, b = 5$

$\therefore\ x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$

$x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$

$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 6)$

$f(x)$를 $x - 2$로 나눈 나머지 $f(2) = 0$

21. 두 함수 $f(x)=|x-2|-5,\ g(x)=x^2+6x+8$ 에 대하여 $0\le x\le 5$ 에서 $y=g(f(x))$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$ 라고 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)=|x-2|-5=t$ 로 놓으면

$y=g(f(x))=g(t)=t^2+6t+8=(t+3)^2-1$

그런데 $0\le x\le 5$ 에서 $-5\le t\le -2$ 이므로

y 의 값은 $t=-5$ 일 때 최대이고 최댓값은 3,

$t=-3$ 일 때 최소이고 최솟값은 -1 이다.

$\therefore M=3,\ m=-1$

$\therefore M+m=2$

22. 방정식 $2x^2-4xy+5y^2-8x-4y+20=0$ 을 만족하는 실수 x, y의 값은?

① $x=2,\ y=4$ ② $x=4,\ y=2$ ③ $x=-1,\ y=2$

④ $x=2,\ y=-1$ ⑤ $x=-2,\ y=1$

해설

판별식을 이용하기 위해 준식을 x 에 관하여 정리하면,

$2x^2-4(y+2)x+5y^2-4y+20=0\cdots$ ①

①이 실근을 가지므로 $\dfrac{D}{4}\geq 0$에서

$4(y+2)^2-10y^2+8y-40\geq 0$

$6y^2-24y+24\leq 0$

$6(y^2-4y+4)\leq 0$

$6(y-2)^2\leq 0$ $\therefore y=2$ ($\because$ y 는 실수)

$y=2$ 를 ①에 대입하면,

$2x^2-16x+32=0,\ \ 2(x-4)^2=0$

$\therefore\ x=4$

23. 모든 x에 대하여 $f(x+1)-f(x-1)=6x^2+6,\ f(0)=1$을 만족시키는 다항식 $f(x)$가 있다. 다음은 자연수 n에 대하여 $(x+\alpha)^n = x^n+n\alpha x^{n-1}+\cdots+\alpha^n$을 이용하여, $f(x)$를 구하는 과정이다.

> $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$(단, $a_n \neq 0$)라고 놓으면
> $f(x+1)-f(x-1)$
> $=a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\}+a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\}+\cdots+$
> $a_1\{(x+1)-(x-1)\}$
> $=\boxed{}x^{n-1}+\cdots=6x^2+6$
> 에서 $n=3,\ a_n=1$
> $\therefore\ f(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+1$
> $f(x+1)-f(x-1)=6x^2+4a_2x+2+2a_1$
> 이므로 $a_2=0,\ a_1=2$ 즉, $f(x)=x^3+2x+1$

위의 풀이 과정에서 $\boxed{}$에 알맞은 것은?

① a_n　② $2a_n$　③ na_n　④ $2na_n$　⑤ $3na_n$

해설

$f(x+1)-f(x-1)$

$=a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\}+a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\}\cdots$

$=a_n\{(x^n+nx^{n-1}+\cdots)-(x^n-nx^{n-1}+\cdots)\}+a_{n-1}\{(x^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots)-(x^{n-1}-(n-1)x^{n-2}+\cdots)\}+\cdots$

$=a_n(2nx^{n-1}+\cdots)+a_{n-1}\{2(n-1)x^{n-2}+\cdots\}+\cdots$

$=2na_nx^{n-1}+\{(n-2)$차 이하의 다항식$\}$

$\therefore\ 2na_nx^{n-1}=6x^2$에서

$n-1=2,\ 2na_n=6$

$\therefore\ n=3,\ a_n=1$

24. 세 실수 x, y, z 에 대하여 $(x-1):(y-3):(z+2)=2:1:3$ 일 때, $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{2}$

해설

$(x-1):(y-3):(z+2)=2:1:3$ 이므로
$x-1=2k$ 에서 $x=2k+1$
$y-3=k$ 에서 $y=k+3$
$z+2=3k$ 에서 $z=3k-2$
$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ 에 대입하면
$(k-2)^2+(-2k+5)^2+(k-3)^2$
$=6k^2-30k+38$
$=6\left(k-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$
따라서 $k=\frac{5}{2}$ 일 때, 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 이다.

25. 함수 $y = x^2 - px$ 와 $y = -x^2 + px$ 의 그래프에 의하여 둘러싸인 부분에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값이 26 일 때, p 의 값을 구하여라. (단, $p > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

포물선의 축이 $x = \frac{p}{2}$ 이므로 직사각형은 직선 $x = \frac{p}{2}$ 에 대하여 대칭이다.

직사각형이 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 $t \left(t > \frac{p}{2}\right)$ 라 하면

가로의 길이는 $2 \times \left(t - \frac{p}{2}\right) = 2t - p$,

세로의 길이는 $(-t^2 + pt) - (t^2 - pt) = -2t^2 + 2pt$

이므로 직사각형의 둘레의 길이는

$2(-2t^2 + 2pt + 2t - p) = -4\left(t - \frac{p+1}{2}\right)^2 + p^2 + 1$ 이다.

따라서 $t = \frac{p+1}{2}$ 일 때, 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은

$p^2 + 1 = 26$ 이므로 $p = 5$ 이다.