

1. $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ 가 $(x-1)(x+2)$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$ 의 값을 정하십시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ 라 놓으면,

$$f(1) = 1 - a + b - 2 = 0$$

$$\therefore -a + b = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$f(-2) = -8 - 4a - 2b - 2 = 0$$

$$\therefore 2a + b = -5 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = -2, b = -1$$

2. 다음 중 다항식 $x^4 - 8x^2 - 9$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x - 3$

② $x + 3$

③ $x^2 + 1$

④ $x^2 + 9$

⑤ $x^3 + 3x^2 + x + 3$

해설

준 식을 인수분해 하면

$$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 + 1)(x^2 - 9)$$

$$= (x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$$

$$\textcircled{5} \ x^2(x + 3) + x + 3 = (x^2 + 1)(x + 3)$$

3. 등식 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x + a)(x + b)(x + c)$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

조립제법을 사용한다

1	1	4	1	-6
		1	5	6
-2	1	5	6	0
		-2	-6	
-3	1	3	0	
		-3		
	1	0		

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$
 $\therefore a + b + c = 4$

4. $\triangle ABC$ 의 꼭짓점 $A(4, 6)$, $B(-2, 2)$ 이고, 무게중심이 $G(1, 3)$ 일 때 꼭짓점 C 의 좌표는?

- ① $(-1, 1)$ ② $(1, -1)$ ③ $(1, 1)$
④ $(-1, -1)$ ⑤ $(1, 2)$

해설

무게중심 구하는 공식을 이용한다.

점 $C(x, y)$ 라 하면,

$$G = \left(\frac{4 - 2 + x}{3}, \frac{6 + 2 + y}{3} \right) = (1, 3)$$

$$\therefore x = 1, \quad y = 1$$

5. 다항식 $f(x) = 4x^3 + ax^2 + x + 1$ 을 $x + \frac{1}{2}$ 로 나누면 나머지가 1일 때, 다항식 $f(x)$ 를 $2x + 1$ 로 나눈 몫 $Q(x)$ 와 나머지 R 을 구하면?

- ① $Q(x) = 2x^2 - x, R = 1$ ② $Q(x) = 2x^2 + x, R = 1$
③ $Q(x) = 2x^2 - 2x, R = 1$ ④ $Q(x) = 4x^2 - 2x, R = \frac{1}{2}$
⑤ $Q(x) = 4x^2 + 2x, R = \frac{1}{2}$

해설

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 = \frac{a}{4} \therefore a = 4$$

$$\begin{aligned}\text{따라서 } f(x) &= 4x^3 + 4x^2 + x + 1 \\ &= x(4x^2 + 4x + 1) + 1 \\ &= x(2x + 1)^2 + 1\end{aligned}$$

$$2x + 1 \text{로 나누면 } Q(x) = 2x^2 + x, R = 1$$

6. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + 1)(y + 1)(z + 1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\begin{aligned} & (x + 1)(y + 1)(z + 1) \\ &= xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

7. $(10^5 + 2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15

② 18

③ 21

④ 26

⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$$10^{15} + 2^3 + 3 \times 2 \times 10^5(10^5 + 2)$$

$$= 10^{15} + 2^3 + 6 \times 10^{10} + 12 \times 10^5$$

$$= 10^{15} + 10^{10} \times 6 + 10^5 \times 12 + 8$$

$$\therefore 1 + 6 + 1 + 2 + 8 = 18$$

8. $\frac{2x+3a}{4x+1}$ 가 x 에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a = 2$

해설

$\frac{2x+3a}{4x+1} = k$ (일정값 = k)라 놓으면 $2x+3a = k(4x+1)$ 에서

$$(2-4k)x + 3a - k = 0$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로,

$$2-4k = 0, 3a - k = 0$$

$$k = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } 3a = k \text{ 에서 } a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 12a = 2$$

9. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x-3$ 이고, 최소공배수가 x^3-2x^2-3x 일 때, 두 이차다항식의 합을 구하면?

① $2x^2-5x$

② $2x^2-x-3$

③ $2x^2+x+3$

④ $2x^2-5x-3$

⑤ $2x^2+5x+3$

해설

두 식 A, B 의 최대공약수가 $x-3$ 이고 최소공배수가 $x(x-3)(x+1)$ 이다.

따라서 이차항의 계수가 1인 두 다항식은

각각 $x(x-3)$, $(x-3)(x+1)$ 이다.

$\therefore$ 두 다항식의 합 $= 2x^2-5x-3$

10. 두 점 A(1, 9), B(2, 3)과 직선 $x + y + 1 = 0$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?

- ① 5 ② $8\sqrt{2}$ ③ 12 ④ $9\sqrt{2}$ ⑤ 13

해설

점 B의 직선 $x + y + 1 = 0$ 에 대한 대칭점을 $B'(a, b)$ 라고 하면 $\overline{BB'}$ 의 중점은 직선 $x + y + 1 = 0$ 위의 점이므로

$$\frac{a+2}{2} + \frac{b+3}{2} + 1 = 0$$

$\therefore a + b + 7 = 0 \cdots \textcircled{A}$

또, $\overline{BB'} \perp (\text{직선 } x + y + 1 = 0)$ 이므로

$$\frac{b-3}{a-2} = 1 \text{ 에서 } b = a + 1 \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서 $a = -4, b = -3$

$\therefore B'(-4, -3)$

$\therefore \overline{AB'} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB'} \geq \overline{AB'} = 13$

11. $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ 일 때, 평행사변형 $OABC$ 의 넓이를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

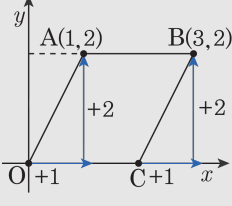
$\overline{OA} \parallel \overline{CB}$, $\overline{OA} = \overline{CB}$ 이

점 A는 점 O를 x 축 방향으로 1만큼, y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로
점 B도 점 C를 x 축 방향으로 1만큼, y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore C = (2, 0)$

따라서 밑변이 2, 높이가 2이므로

(넓이) $= 2 \times 2 = 4$



12. 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 6$, $a^2 + b^2 + c^2 = 12$ 를 만족할 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값을 구하면?

① 8 ② 16 ③ 24 ④ 36 ⑤ 42

해설

공식 $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$ 에 주어진 수를 대입하여

$(ab + bc + ca)$ 의 값을 구하면 $(ab + bc + ca) = 12$

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

에서

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ 이므로

$\frac{1}{2} \{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \} = 0$

$\therefore a = b = c = 2$ 이므로 $a^3 + b^3 + c^3 = 24$

13. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$ 을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$ 이다. pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\} + 21x^2 \\ &= (x^2 - 7x - 18)(x^2 + 3x - 18) + 21x^2 \\ &= \{(x^2 - 18) - 7x\}\{(x^2 - 18) + 3x\} + 21x^2 \\ &= (x^2 - 18)^2 - 4x(x^2 - 18) - 21x^2 + 21x^2 \\ &= (x^2 - 18)(x^2 - 4x - 18)\end{aligned}$$

따라서 $p = -18, g = -4$

$$\therefore pg = (-18) \times (-4) = 72$$

14. $a(a+1)=1$ 일 때, $\frac{a^6-1}{a^4-a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

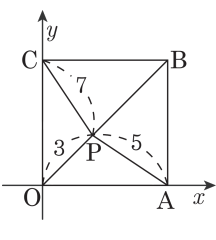
▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}\frac{a^6-1}{a^4-a^2} &= \frac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)} \\ &= \frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)} \\ &= \frac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2} \leftarrow a^2=1-a \text{ 대입} \\ &= \frac{2(1-a) \times 2}{1-a} = 4\end{aligned}$$

15. 다음 그림과 같이 정사각형 OABC의 내부의 점 P에 대하여 $OP = 3$, $AP = 5$, $CP = 7$ 일 때 선분 PB의 길이는?

- ① $2\sqrt{15}$ ② $\sqrt{65}$ ③ $\sqrt{70}$
 ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{5}$



해설

정사각형의 한 변의 길이를 a , 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & \dots \textcircled{A} \\ (a-x)^2 + y^2 = 25 & \dots \textcircled{B} \\ x^2 + (a-y)^2 = 49 & \dots \textcircled{C} \end{cases}$$

선분 PB의 길이는

$$PB = \sqrt{(a-x)^2 + (a-y)^2} \text{ 이다.}$$

$\textcircled{B} + \textcircled{C} - \textcircled{A}$ 에서

$$(a-x)^2 + (a-y)^2 = 25 + 49 - 9 = 65$$

$$\text{따라서 } PB = \sqrt{65}$$

16. 좌표평면 위의 두 점 A(-2, 5), B(6, -3)을 잇는 선분 AB를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점이 제 1사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는? (단, $0 < t < 1$)

① $\frac{1}{8} < t < \frac{1}{4}$

② $\frac{1}{4} < t < \frac{5}{8}$

③ $\frac{3}{8} < t < \frac{3}{4}$

④ $\frac{1}{2} < t < \frac{7}{8}$

⑤ $\frac{5}{8} < t < 1$

해설

선분 AB를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{t \cdot 6 + (1-t) \cdot (-2)}{t + (1-t)}, \frac{t \cdot (-3) + (1-t) \cdot 5}{t + (1-t)} \right) = (8t - 2, 5 - 8t)$$

이 점이 제 1사분면에 있기 위해서는

$$8t - 2 > 0, 5 - 8t > 0$$

$$\therefore \frac{1}{4} < t < \frac{5}{8}$$

17. x 의 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 u, v 에 대하여 $f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$ 가 성립할 때, $f(3)$ 의 값은? (단, $f(1) = 1$ 이라고 한다.)

① -1

② 2

③ -2

④ 1

⑤ 5

해설

$f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$ 가

u, v 에 대한 항등식이므로

$u = 1, v = 0$ 일 때도 이 등식이 성립한다.

$$\therefore f(1)f(0) = f(1) + f(1)$$

$$f(1) = 1 \text{ 이므로 } f(0) = 2$$

또, $u = v = 1$ 일 때는

$$f(1)f(1) = f(2) + f(0) \quad \therefore f(2) = -1$$

$$\therefore f(3) = f(2+1) = f(2)f(1) - f(2-1)$$

$$= f(2)f(1) - f(1) = -1 - 1$$

$$= -2$$

18. 다항식 $f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2x+1$ 이고, $(x-2)^3$ 으로 나눈 나머지가 x^2-x+6 이다. $f(x)$ 를 $(x+1)(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$

② $3x-2$

③ $3x+2$

④ x^2-2x+1

⑤ x^2-x+6

해설

$$f(x) = (x+1)^2 A(x) + 2x+1 \text{ 에서 } f(-1) = -1$$

$$f(x) = (x-2)^3 B(x) + x^2 - x + 6$$

$$= (x-2)^3 B(x) + (x-2)^2 + 3x + 2$$

$$= (x-2)^2 ((x-2)B(x) + 1) + 3x + 2$$

즉 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는 $3x+2$

구하는 나머지를 ax^2+bx+c 라 하면

$$f(x) = (x+1)(x-2)^2 Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x+1)(x-2)^2 Q(x) + a(x-2)^2 + 3x + 2$$

$$f(-1) = 9a - 1 = -1 \quad \therefore a = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x-2)^2 + 3x + 2$$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $3x+2$

19. 다음 식 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a+b$

② $b+c$

③ $c+a$

④ $b-a$

⑤ $-b-c$

해설

전개하여 a 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$$

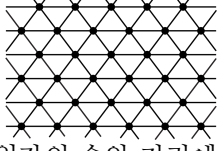
$$= (b+c)a^2 + (b^2+2bc+c^2)a + bc(b+c)$$

$$= (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\}$$

$$= (b+c)(a+b)(a+c)$$

∴ ④ $b-a$ 는 인수가 아니다

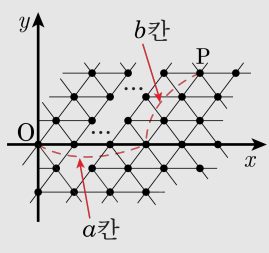
20. 어떤 물질은 원자를 구로 나타낼 경우 똑같은 구들을 규칙적으로 배열하여 얻은 정육각형 격자구조를 갖는다. 다음 그림은 이 격자구조의 한 단면에 놓여있는 원자의 중심을 연결한 것이다. 이 구조에서 한 원자의 에너지는 인접한 원자의 수와 거리에 영향을 받는다. 가장 인접한 원자의 중심간의 거리가 모두 1일 때, 동일 평면상에서 고정된 한 원자와 중심사이의 거리가 $\sqrt{7}$ 인 원자의 개수는?



- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 12 ⑤ 16

해설

다음 그림과 같이 좌표축을 잡아서
점 O 에서 우측으로 a 칸
위상쪽으로 b 칸 이동한 점 P 를 생각
하자.



$$\begin{aligned} \text{이 때 } \overline{OP}^2 &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 \\ &= a^2 + ab + b^2 = 7 \\ 4a^2 + 4ab + 4b^2 &= (2a+b)^2 + 3b^2 = 28 \\ \text{가능한 } 3b^2 &= 0, 3, 12, 27 \text{ 일 때} \\ (2a+b)^2 &= 28, 25, 16, 1 \end{aligned}$$