1. 이차함수 $y = -2x^2 - 4ax + 8a$ 의 최댓값을 M 이라고 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$y = -2x^2 - 4ax + 8a = -2(x+a)^2 + 2a^2 + 8a$

$\therefore M = 2a^2 + 8a = 2(a+2)^2 - 8$

따라서 M 의 최솟값은 -8 이다.

2. x, y, z가 실수일 때, $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$의 최솟값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$

$= (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 - 1$

이 때, x, y, z가 실수이므로

$(x+1)^2 \geq 0, \ (y-3)^2 \geq 0, \ (z-4)^2 \geq 0$

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25 \geq -1$

따라서 $x = -1, \ y = 3, \ z = 4$일 때,

주어진 식의 최솟값은 -1이다.

3. x, y 가 실수일 때, $2x^2-8x+y^2+2y+6$ 의 최솟값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$2x^2-8x+y^2+2y+6$

$=2\left(x^2-4x\right)+\left(y^2+2y\right)+6$

$=2(x-2)^2+(y+1)^2-3$

x, y 는 실수이므로 $(x-2)^2\geq 0$, $(y+1)^2\geq 0$

$\therefore 2x^2-8x+y^2+2y+6\geq -3$

따라서, $x=2$, $y=-1$ 일 때 최솟값은 -3 이다.

4. 두 실수 x, y 가 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면

$y^2-2y+\left(x^2+2x-2\right)=0$

x, y 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-\left(x^2+2x-2\right)\geq 0$$

$x^2+2x-3\leq 0$, $(x+3)(x-1)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

5. $x^2-xy+y^2+2y=0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

① $\dfrac{2}{3}$ ② 1 ③ 2 ④ $\dfrac{11}{5}$ ⑤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면

$y^2+(2-x)y+x^2=0$

이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$D=(2-x)^2-4\cdot x^2\geq 0,$

$3x^2+4x-4\leq 0,\ \ (x+2)(3x-2)\leq 0$

$\therefore -2\leq x\leq \dfrac{2}{3}$

따라서 x 의 최댓값은 $\dfrac{2}{3}$ 이다.

6. 이차방정식 $ax^2+(a-3)x-2a=0$의 두 근의 차가 $\sqrt{17}$이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

해설

$ax^2+(a-3)x-2a=0$의 두 근을 α, β라 하면,

$\alpha+\beta=-\frac{a-3}{a}$, $\alpha\beta=-2$

문제의 조건에서 $|\alpha-\beta|=\sqrt{17}$

$$\therefore\ 17=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=\left(\frac{a-3}{a}\right)^2+8$$

$$\therefore\ \left(\frac{a-3}{a}\right)^2=9,\ 8a^2+6a-9=0$$

따라서, a의 값들의 합은 $-\frac{3}{4}$

7. a, b, c는 실수이고, $a > 0, ac - b^2 > 0, b \neq 0$이라 할 때, x의 이차방정식 $x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 서로 다른 두 개의 음의 근　② 서로 다른 두 개의 양의 근

③ 양의 중근　④ 음의 중근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$의 판별식을 D라 하면

$$D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2)$$
$$= (a-c)^2 + 4b^2 > 0 \cdots ㉠ \ (\because \ b \neq 0)$$

$a > 0, \ ac > b^2 > 0$에서 $c > 0$이므로

(두 근의 곱)$= ac - b^2 > 0 \cdots ㉡$

(두 근의 합)$= a + c > 0 \cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢에서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 양의 근을 가진다.

8. $x^2+ax+(a^2+2a-3)=0$의 두 근이 서로 다른 부호를 갖고 양근이 음근의 절댓값보다 작을 때, 상수 a의 범위를 구하면?

① $0<a<1$ ② $\frac{1}{2}<a<2$ ③ $1\le a<2$

④ $2<a\le 3$ ⑤ $-\frac{1}{2}<a<2$

해설

두 근을 α, β라 하면

$|$음근$|$ > 양근이므로

$\alpha+\beta=-a<0,\ \alpha\beta=a^2+2a-3<0$

$\therefore\ 0<a<1$

9. 이차식 $x^2-6x+10$ 를 복소수 범위에서 인수분해 한 것은?

① $(x-6+2i)(x-6-2i)$ ② $(x-6+i)(x-6-i)$

③ $(x-3+2i)(x-3-2i)$ ④ $(x-3+i)(x-3-i)$

⑤ $(x-3+2i)(x-3-i)$

해설

$x^2-6x+10=0$ 의 근은 $3\pm i$

$\therefore \quad x^2-6x+10=(x-3+i)(x-3-i)$

10. 실수 x, y 대하여 $\dfrac{x}{1+i}+\dfrac{y}{1-i}=2-i$가 성립할 때, $2x+y$ 의 값은?

① 8　② 7　③ 5　④ 4　⑤ $\dfrac{9}{5}$

해설

$$\frac{(1-i)x+(1+i)y}{(1+i)(1-i)}=2-i$$

$$\frac{(x+y)-(x-y)i}{2}=2-i$$

$$(x+y)-(x-y)i=4-2i$$

복소수의 상등에 의해서

$x+y=4\cdots$㉠, $x-y=2\cdots$㉡

㉠, ㉡ 에서 $x=3,\ y=1\quad \therefore\ 2x+y=7$

11. 다음 보기 중 옳은 것의 개수는? (단, $i = \sqrt{-1}$)

㉠ 16의 제곱근은 4이다. ㉡ 실수를 제곱하면 양수 또는 0이다. ㉢ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z + \bar{z}$ 는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수) ㉣ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z\bar{z}$는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) ㉤ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z = \bar{z}$이면 z는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ 제곱해서 16 이 되는 수 $4, -4$ ∴ 거짓

㉡ 실수는 제곱하면 0보다 크거나 같다. ∴ 참

㉢ $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $z + \bar{z} = 2a$ ∴ 참

㉣ $z\bar{z} = a^2 + b^2$ ∴ 참

㉤ $z = \bar{z}$, $a + bi = a - bi$, $2bi = 0$, $b = 0$ ∴ $z = a = \bar{z}$ ∴ 참

12. $\alpha,\ \beta$ 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\alpha},\ \overline{\beta}$ 는 각각 $\alpha,\ \beta$ 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$ 이면, $\alpha + \beta,\ \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.
㉡ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.
㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.
㉣ $\alpha + \beta i = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.

① ㉡,㉢ ② ㉠,㉡,㉢ ③ ㉠,㉡,㉣

④ ㉠,㉡ ⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣

해설

$\alpha = a + bi,\ \beta = a - bi\ (a,\ b$ 는 실수)

㉠ $\alpha + \beta = 2a,\ \alpha\beta = a^2 + b^2$

㉡ $\alpha\beta = 0$, $a^2 + b^2 = 0$, $a = 0,\ b = 0$

㉢ (반례) $\alpha = 1,\ \beta = i$

㉣ (반례) $\alpha = 1,\ \beta = i$

13. α, β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\bar{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ $\alpha = \bar{\beta}$ 이면 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

㉡ $\alpha = \bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

① ㉠ ② ㉠ ,㉡ ③ ㉡ ,㉢

④ ㉠ ,㉢ ⑤ ㉠ ,㉡ ,㉢

해설

$\alpha = a + bi \Rightarrow \bar{\beta} = a + bi$

㉠ $\alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ 는 실수 (T), $\alpha\beta = a^2 + b^2 =$ 실수

㉡ $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$

$\therefore \alpha = 0$ (T)

㉢ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

14. 복소수 z 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, 다음 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $z \neq 0$)

보기

㉠ $z + \bar{z}$ 는 실수이다.

㉡ $z\bar{z} > 0$

㉢ $z - \bar{z}$ 는 허수이다.

㉣ $z^2 + \bar{z}^2 \geq 0$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $(a,\ b$ 는 실수$)$

㉠ $z + \bar{z} = 2a$(실수)

㉡ $z\bar{z} = a^2 + b^2 > 0$

㉢ $z - \bar{z} = 2bi$, $b = 0$ 일 경우에는 0 이다.

즉, z 가 실수부로만 이루어져 있는 경우에는 실수이다.

$ex)$ $z = 3$, $\bar{z} = 3$, $z - \bar{z} = 3 - 3 = 0$

㉣ $z^2 + \bar{z}^2 = 2(a^2 - b^2)$ → 우변이 0보다 크거나 같다고 할 수는 없다.

15. 복소수 α, β 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

② $\overline{\alpha^n} = (\overline{\alpha})^n$

③ $\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$(단, $\alpha \neq 0$)

④ $\overline{(\overline{\alpha})} = \alpha$

⑤ $\alpha + \overline{\alpha} = \alpha\overline{\alpha}$ 이면 α 는 허수이다.

해설

⑤ (반례) $\alpha = 2,\ \overline{\alpha} = 2$

16. $x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^7 + x^4 + 2$ 의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$$x^2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$$
$$= \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$x^3 = x \cdot x^2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$= \frac{-1+3i^2}{4} = -1$$
$$\therefore\ x^7 + x^4 + 2 = (x^3)^2 \cdot x + x^3 \cdot x + 2 = x - x + 2 = 2$$

17. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-2}} = -\sqrt{\dfrac{a}{a-2}}$ 를 만족하는 실수 a 에 대하여 $|a-2|+|a|$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \ (a<0, b\geq 0)$$

$$\therefore a \geq 0,\ \ a-2<0 \Rightarrow 0 \leq a < 2$$

$$\therefore |a-2|+|a| = -(a-2)+a = 2$$

18. $z = 1 + i$ 일 때, $\dfrac{\bar{z} - 1}{z} - \dfrac{z - 1}{\bar{z}}$ 의 값을 구하면?

① $-i$ ② i ③ $-2i$ ④ $2i$ ⑤ $3i$

해설

$\bar{z} = 1 - i$

$$\begin{aligned}\frac{\bar{z} - 1}{z} - \frac{z - 1}{\bar{z}} &= \frac{-i}{1 + i} - \frac{i}{1 - i} \\ &= -\frac{2i}{(1 + i)(1 - i)} \\ &= -i\end{aligned}$$

19. $f(n)=(n+1)i^{n}-ni^{n+1}$ 이라고 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, n 은 자연수이고, $i^2=-1$ 이다.)

① $f(n+1)-f(n)$ 은 실수이다.

② $f(n+1)-f(n)$ 은 순허수이다.

③ $f(n)+f(n+1)+f(n+2)+f(n+3)$ 은 실수이다.

④ $f(n)+f(n+1)+f(n+2)+f(n+3)$ 은 순허수이다.

⑤ $f(1)+f(2)+\cdots+f(8)$ 은 순허수이다.

해설

k가 정수일 때 $i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i$,
$i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i$ 이므로
$f(1)=2i+1$,$f(2)=-3+2i$, $f(3)=-4i-3$, $f(4)=5-4i$
$f(5)=6i+5$,$f(6)=-7+6i$, $f(7)=-8i-7$,$f(8)=9-8i$
① $f(3)-f(2)=-6i$ (거짓)
② $f(2)-f(1)=-4$ (거짓)
③ $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-4i$ (거짓)
④ $f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=4$ (거짓)
⑤ $f(1)+f(2)+\cdots+f(8)$

$$=\{f(1)+f(2)+f(3)+f(4)\}+\{f(5)+f(6)+f(7)+f(8)\}$$
$$=-4i-4i=-8i$$ (참)

20. 함수 $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{ax^2-3x+a-2}}$ 이 최댓값을 가질 때, 정수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

분모가 항상 양수이므로 주어진 함수가 최대가 될 때는 함수 $y=ax^2-3x+a-2\cdots$㉠이 최솟값을 가질 때이다.
만약 함수 y 가 음수나 0 을 최솟값으로 갖게 되면 함숫값이 존재하지 않으므로 함수 y 의 최솟값은 양수이다.
따라서 $a>0\cdots$㉡
$D=-4a^2+8a+9<0\cdots$㉢ 의 두 식이 모두 만족되면, ㉠이 양의 최솟값을 갖는다.

$-4a^2+8a+9<0$ 에서 $a<\dfrac{2-\sqrt{13}}{2}$, $a>\dfrac{2+\sqrt{13}}{2}$

따라서 ㉡과의 공통 범위를 구하면 $a>\dfrac{2+\sqrt{13}}{2}=2.80$ 이므로

$a=3$ 이다.