

1. 다음 ()안에 알맞은 수는?

$$\frac{\sqrt{3}}{1}, \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{7}}{9}, (\quad), \frac{\sqrt{11}}{25}$$

- ① $\frac{\sqrt{7}}{12}$
- ② $\frac{\sqrt{3}}{12}$
- ③ $\frac{3}{16}$
- ④ $\frac{3\sqrt{2}}{16}$
- ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{18}$

해설

나열된 각 수는 분수 꼴이며, 분자는 $\sqrt{+2}$ 의 규칙으로 나타난다.
따라서 ()안에 들어갈 수의 분자는 $\sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$ 이다.
분모는 +1이 된 수의 제곱의 규칙으로 나타난다.
따라서 ()안에 들어갈 수의 분모는 $(3+1)^2 = 16$ 이므로 ()
안에 들어갈 수는 $\frac{3}{16}$

2. 세 수 $5 - 2x$, $4 - x$, $6 + 3x$ 가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$5 - 2x$, $4 - x$, $6 + 3x$ 가 등차수열을 이루면 $4 - x$ 가 등차중항이므로

$$4 - x = \frac{(5 - 2x) + (6 + 3x)}{2}$$

$$2(4 - x) = 5 - 2x + 6 + 3x$$

$$8 - 2x = 11 + x$$

$$-3x = 3 \quad \therefore x = -1$$

3. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$

② $\frac{2n}{n+1}$

③ $\frac{n}{2n+1}$

④ $\frac{n}{n+2}$

⑤ $\frac{2n}{2n+1}$

해설

$$\begin{aligned} \text{준 식)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \right\} + \cdots + \\ &\quad \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

4. 등차수열 $3, 7, 11, 15, \dots$ 에 대하여 다음의 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \textcircled{7} &= \frac{3 + \textcircled{L}}{2} \\ \textcircled{L} &= \frac{\textcircled{E} + 15}{2} \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$7 = \frac{3 + 11}{2}$, $11 = \frac{7 + 15}{2}$ 가 성립하므로

$\textcircled{7}$ 는 7, $\textcircled{L}$ 는 11, $\textcircled{E}$ 는 7이다.

$\therefore \textcircled{7} + \textcircled{L} + \textcircled{E} = 7 + 11 + 7 = 25$

5. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 두 등차수열 $\{2a_n\}$, $\{3a_n + 2\}$ 의 공차의 합은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 2이므로

$$a_{n+1} - a_n = 2$$

수열 $\{2a_n\}$ 의 공차를 d_1 이라 하면

$$d_1 = 2a_{n+1} - 2a_n = 2(a_{n+1} - a_n) = 2 \times 2 = 4$$

수열 $\{3a_n + 2\}$ 의 공차를 d_2 이라 하면

$$d_2 = (3a_{n+1} + 2) - (3a_n + 2) = 3(a_{n+1} - a_n) = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore d_1 + d_2 = 4 + 6 = 10$$

6. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_{17} = -28$, $a_{65} = 8$ 이다. 이 등차수열의 첫째항부터 제 33항까지의 합은?

① -924 ② -462 ③ -231 ④ 462 ⑤ 924

해설

등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_{17} = -28 \text{에서 } a + 16d = -28 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_{65} = 8 \text{에서 } a + 64d = 8 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{을 연립하여 풀면 } a = -40, d = \frac{3}{4}$$

따라서, 첫째항부터 제 33항까지의 합은

$$S_{33} = \frac{33}{2} \left\{ 2 \cdot (-40) + (33 - 1) \cdot \frac{3}{4} \right\} = -924$$

7. 첫째항부터 제10항까지의 합은 85, 제 11항부터 제20항까지의 합은 385인 등차수열이 있다. 이때, 이 수열 $\{a_n\}$ 의 제 21항부터 제30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 685

해설

주어진 수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하고 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{10} = 85, S_{20} = S_{10} + 385 = 85 + 385 = 470$$

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 85 \cdots \textcircled{A}$$

$$S_{20} = \frac{20(2a + 19d)}{2} = 470 \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a = -5$, $d = 3$

$$\therefore S_{30} = \frac{30\{2 \cdot (-5) + 29 \cdot 3\}}{2} = 1155$$

따라서 구하는 합은 $1155 - 470 = 685$

8. 수직선 위에 서로 다른 두 점 $A(1)$, $B(x)$ 가 있다. 선분 AB 를 $1:2$ 로 내분하는 점을 P 라 하면 A, P, B 의 좌표는 이 순서로 등비수열을 이룬다.

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$$P\text{의 }x\text{좌표} = \frac{1 \cdot x + 2 \cdot 1}{1 + 2} = \frac{x + 2}{3}$$

$$1 \cdot x = \left(\frac{x + 2}{3}\right)^2$$

$$x = \frac{x^2 + 4x + 4}{9}$$

$$9x = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = 1, 4$$

$$x \neq 1 \text{ 이므로 } x = 4$$

9. 2와 162사이에 세 양수 a, b, c 를 넣어 $2, a, b, c, 162$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루게 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 78

해설

$$\begin{aligned}b^2 &= 2 \times 162 \\b &= 18 \quad (\because b > 0) \\2, a, 18, c, 162 &\text{가 등비수열을 이루므로} \\a^2 &= 2 \times 18 \\a &= 6 \quad (\because a > 0) \\c^2 &= 18 \times 162 \\c &= 54 \\\therefore a + b + c &= 6 + 18 + 54 = 78\end{aligned}$$

10. $(2^2 + 1) + (3^2 + 3) + (4^2 + 5) + \cdots + (10^2 + 17)$ 의 값은?

- ① 465 ② 466 ③ 467 ④ 468 ⑤ 469

해설

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 \{ (k+1)^2 + (2k-1) \} &= \sum_{k=1}^9 (k^2 + 4k) \\ &= \sum_{k=1}^9 k^2 + \sum_{k=1}^9 4k \\ &= \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} + 4 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 285 + 180 = 465 \end{aligned}$$

11. 100차 방정식 $x^{100} - 5x - 2 = 0$ 의 근을 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$ 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{100} x_k^{100}$ 의 값은?

① 100 ② 125 ③ 200 ④ 225 ⑤ 325

해설

$x^{100} = 5x + 2$ 에서 x 에 모든 근을 대입해 보면

$$x_k^{100} = 5x_k + 2$$

또한 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 100차 방정식의 모든 근의 합은 0이므로 $\sum_{k=1}^{100} x_k$ 의 값은 0이다.

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100} x_k^{100} &= \sum_{k=1}^{100} (5x_k + 2) \\ &= 5 \sum_{k=1}^{100} x_k + \sum_{k=1}^{100} 2 = 200\end{aligned}$$

12. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n$ 일 때, $\sum_{k=1}^n a_{2k-1}$ 을 n 에 대한 식으로 나타내면?

① $n^2 + 1$

② $n^2 + 3n$

③ $2n^2$

④ $2n^2 + n$

⑤ $3n^2 - 1$

해설

$$\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n \text{ 이므로}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 2n \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = S_1 = 2$$

이것은 ㉠에 $n = 1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = 2n$$

$$\therefore a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k-2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^n (4k-2) \\ &= 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n \\ &= 2n^2 \end{aligned}$$

13. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^3 - n$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$ 의 값은?

- ① $\frac{17}{19}$
- ② $\frac{17}{30}$
- ③ $\frac{19}{40}$
- ④ $\frac{17}{50}$
- ⑤ $\frac{19}{60}$

해설

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^3 - n) - \{(n-1)^3 - (n-1)\} = 3n(n-1) \quad (n \geq 2)$$
$$\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3n(n-1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \quad (n \geq 2)$$
$$\therefore \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$$
$$= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20} \right) \right\}$$
$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{20} \right) = \frac{19}{60}$$

14. $\sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{2^k}{10} \right\rfloor$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

k 에 1부터 10까지 차례로 대입하여 각 항의 값을 구해서 더하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{2^k}{10} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{2^1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^3}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^4}{10} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^{10}}{10} \right\rfloor \\ &= 0 + 0 + 0 + 1 + 3 + 6 + 12 + 25 + 51 + 102 = 200\end{aligned}$$

15. 수열 $\{a_n\}$ 이 1, 3, 7, 15, 31, ... 일 때, 계차수열 $\{b_n\}$ 의 일반항이 $b_n = \alpha^n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = \beta^n + \gamma$ 이다. 이때, 실수 α, β, γ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\{a_n\} : 1, 3, 7, 15, 31, \dots$

$$\begin{array}{ccccccc} & \vee & \vee & \vee & \vee & & \\ & 2 & 4 & 8 & 16 & \cdots & \rightarrow b_n = 2^n \end{array}$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$$

$$= 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$\alpha = 2, \beta = 2, \gamma = -1$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 3$$

16. $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + n^2 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 290

해설

$a_{n+1} = a_n + n^2$ 의 n 에 $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ 를 차례로 대입하여
변끼리 더하면

$$\begin{array}{r} a_1 = a_1 + 1^2 \\ a_2 = a_1 + 1^2 + 2^2 \\ a_3 = a_1 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \\ \vdots \\ +) a_{10} = a_1 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_1 + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2) \\ &= 5 + \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} \\ &= 290 \end{aligned}$$

17. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ 이고, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 을 만족할 때, 일반항 a_n 을 구하면?

- ① 2^{n-1} ② 3^{n-1} ③ 4^{n-1} ④ 5^{n-1} ⑤ 6^{n-1}

해설

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ 에서
 $a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$
 $a_{n+1} - a_n = b_n$ 으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n$
 이때, 수열 $\{b_n\}$ 은 공비가 3 인 등비수열이고,
 $b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$ 이므로
 $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
 수열 $\{b_n\}$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열이므로
 $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1}$
 $= 1 + \frac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = 3^{n-1}$

18. $a_1 = 4$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 이 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_{n+1} = 3S_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)이 성립할 때, 제 5항은?

① 678 ② 708 ③ 738 ④ 768 ⑤ 798

해설

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 이고 $a_{n+1} = 3S_n$ 이므로

$$S_{n+1} - S_n = 3S_n$$

$$\therefore S_{n+1} = 4S_n$$

이때, $a_1 = S_1 = 4$ 이므로 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 4, 공비가 4인 등비수열이다.

$$\therefore S_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$$

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = 4^n - 4^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1} (n \geq 2)$$

$$\therefore a_5 = 3 \cdot 4^4 = 768$$

19. 첫째항이 2009 이고 공차 d 가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_{402} \times S_{403} < 0$ 일 때, $a_n \times a_{n+1} < 0$ 을 만족하는 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 201

해설

$S_{402} \times S_{403} < 0$ 에서 $S_{402} > 0, S_{403} < 0$

$$S_{402} = \frac{402}{2}(2 \times 2009 + 401d) > 0$$

$$\therefore d > -10. \dots$$

$$S_{403} = \frac{403}{2}(2 \times 2009 + 402d) < 0$$

$$\therefore d < -9. \dots$$

d 는 정수이므로 $d = -10$ 이다.

$$\text{따라서 } a_n = 2009 + (n - 1) \times (-10)$$

$a_n < 0$ 인 최초의 n 을 구하면

$$a_n = 2009 + (n - 1) \times (-10) < 0$$

$$\therefore n > 201.9$$

따라서 $n \leq 201$ 이면 $a_n > 0$, $n \geq 202$ 이면 $a_n < 0$ 이므로

$a_n \times a_{n+1} < 0$ 을 만족하는 n 의 값은 201 이다.

20. 서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여 $2, \frac{a^2}{2}, b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루고 $a + 2, b, 1$ 이 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} a^2 &= 2 + b, \quad b^2 = a + 2 \text{ 이므로} \\ a^2 - b^2 &= b - a \\ a^2 - b^2 + a - b &= 0 \\ (a - b)(a + b + 1) &= 0 \\ a \neq b \text{ 이므로 } a + b + 1 &= 0 \\ a &= -1 - b, \quad b = -1 - a \\ a^2 &= 2 - 1 - a = -a + 1 \\ b^2 &= -1 - b + 2 = -b + 1 \\ a^2 + b^2 &= -(a + b) + 2 \\ &= -(-1) + 2 = 3 \end{aligned}$$