1. $i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 50i^{50}$ 의 값은?

① $-26-25i$　② $-26+25i$　③ 0
④ $-25+26i$　⑤ $25+26i$

해설

$i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 50i^{50}$
$= \{i + 2\cdot(-1) + 3\cdot(-i) + 4\cdot 1\} + \{5i + 6\cdot(-1) + 7\cdot(-i) + 8\cdot 1\}$
$+ \cdots + \{45i + 46\cdot(-1) + 47\cdot(-i) + 48\cdot 1\} + 49i + 50\cdot(-1)$
$12(2-2i) + 49i - 50 = -26 + 25i$

2. 이차방정식 $3x^2-6x+k=0$이 실근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k<1$　　② $k\le 1$　　③ $k<3$

④ $k\le 3$　　⑤ $1<k<3$

해설

$3x^2+6x+k=0,$

$\frac{D}{4}=(-3)^2-3\cdot k\ge 0$

$3k\le 9 \quad \therefore\ k\le 3$

3. 이차방정식 $x^2+7x+1=0$의 두 근이 α, β일 때, $(\alpha^2+\beta^2)+5(\alpha+\beta)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

이차방정식 $x^2+7x+1=0$의 두 근이 α, β이므로,
근과 계수와의 관계에 의해서
$\alpha+\beta=-7,\ \alpha\beta=1$
$(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-7)^2-2\cdot 1=47$
$\therefore\ 47+5\cdot(-7)=47-35=12$

4. $\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}=a+bi$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 15　② 25　③ 35　④ 45　⑤ 55

해설

$\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$

$=2\sqrt{3}i-3\sqrt{2}+\sqrt{3}i$

$=-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}i$

$=a+bi$

따라서, $a=-3\sqrt{2}, b=3\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=18+27=45$

5. 복소수 $z=(1+i)x^2+x-(2+i)$가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -1　② 1　③ 1　④ 2　⑤ 2

해설

복소수 z를 $a+bi$ ($a,\ b$는 실수) 의 꼴로 정리하면
$z=(x^2+x-2)+(x^2-1)i$
이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.
즉, $x^2-1=0$, $x=\pm1$
한편, $x=1$이면 $z=0+0i=0$이므로
$z\neq0$라는 조건에 맞지 않는다.
$\therefore\ x=-1$

6. $z = (1+i)x^2 + (2-i)x - 8 - 2i$에 대하여 $z^2 < 0$을 만족하는 실수 x의 값을 구하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① -4　　② -2　　③ 2　　④ 4　　⑤ 6

해설

$z = (x^2 + 2x - 8) + (x^2 - x - 2)i$
$\quad = (x-2)(x+4) + (x+1)(x-2)i$
그런데, $z^2 < 0$에서 z는 순허수이므로
$\therefore\ x = -4$

7. $\alpha = 1+i,\ \beta = 1-i$ 일 때, $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=2$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha} &= \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} \\ &= \frac{8-12}{2} \\ &= -2\end{aligned}$$

8. a, b 가 실수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

Ⅰ n이 양의 홀수일 때, $\sqrt[n]{-3^n}$은 실수이다.

Ⅱ $-1 < a < 1$일 때, $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = 3$

Ⅲ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$이다.

Ⅳ $0 < a < b$일 때, $\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅲ

④ Ⅰ, Ⅳ ⑤ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt[n]{-3^n} = -\sqrt[n]{3^n} = -3 \in R$ (참)

Ⅱ. $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = |a+1| - |a-2|$
$= a + 1 - (2 - a)$
$= 2a - 1 \neq 3$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이면 $b < 0$, $a \geq 0$ 이다.

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-(-b)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{(-b)}i$
$= \sqrt{a(-b)}i = \sqrt{-a(-b)} = \sqrt{ab}$

$\therefore$ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (참)

Ⅳ. $0 < a < b$ 이면 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ 이다.

$\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{b} - \sqrt{a}$

9. $x=-2+i$ 일때, x^3+4x^2-3x+2 의 값은?

① $-15+5i$ ② $-12+2i$ ③ $14-4i$
④ $16-6i$ ⑤ $18-8i$

해설

$x=-2+i$ 에서 $x+2=i$ 의 양변을 제곱하면
$x^2+4x+5=0$ 즉 $x^2+4x=-5$ 이므로
x^3+4x^2-3x+2
$=x(x^2+4x)-3x+2$
$=-5x-3x+2$
$=-8x+2$
$=-8(-2+i)+2$
$=18-8i$

10. 다음을 계산하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3 + 3i$

해설

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

$$= \sqrt{3 \cdot (-3)} - \sqrt{(-3) \cdot (-3)} + \sqrt{\frac{-18}{2}} - \sqrt{\frac{18}{-2}}$$

$$= \sqrt{-9} - \sqrt{9} + \sqrt{-9} - \sqrt{-9}$$

$$= -\sqrt{9} + \sqrt{-9}$$

$$= -3 + 3i$$

11. 일차방정식 $a^2x+1=a^4-x$의 해는? (단, a는 실수)

① a ② $a+1$ ③ $a-1$
④ a^2-1 ⑤ a^2+1

해설

$a^2x+1=a^4-x$ 에서 $a^2x+x=a^4-1$
$(a^2+1)x=(a^2-1)(a^2+1)$
$\therefore x=a^2-1(\because a^2+1>0)$

12. 다음 방정식을 풀면?

$$(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)x+2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

② $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

③ $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

④ $x=1$ 또는 $x=-\sqrt{3}+1$

⑤ $x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

해설

x^2 의 계수를 유리수로 만들기 위해 양변에 $\sqrt{3}+1$을 곱하면

$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)^2x+2(\sqrt{3}+1)=0$

$2x^2-2(2+\sqrt{3})x+2(\sqrt{3}+1)=0$

$x^2-(2+\sqrt{3})x+(\sqrt{3}+1)=0$

$(x-1)\left\{x-(\sqrt{3}+1)\right\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

13. 방정식 $x^2+|x|=|x-1|+5$를 만족하는 두 근의 곱은?

① $-2\sqrt{6}$　② $-\sqrt{6}$　③ 0
④ $\sqrt{6}$　⑤ $2\sqrt{6}$

해설

ⅰ) $x<0$일 때
$x^2-x=-(x-1)+5,\ x^2=6$
$\therefore x=\pm\sqrt{6}$
그런데 $x<0$이므로 $x=-\sqrt{6}$
ⅱ) $0\le x<1$일 때
$x^2+x=-(x-1)+5$
$x^2+2x-6=0$
$\therefore x=-1\pm\sqrt{7}$
그런데 $0\le x<1$이므로 해가 없다.
ⅲ) $x\ge 1$일 때,
$x^2+x=x-1+5,\ x^2=4$
$\therefore x=\pm 2$
그런데 $x\ge 1$이므로 $x=2$
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 주어진 방정식의 해는
$x=2$또는 $x=-\sqrt{6}$이므로
두 근의 곱은 $-2\sqrt{6}$

14. x에 대한 이차방정식 $x^2 + bx = -(a^2 - 3bx + c^2)$이 중근을 가질 때, a, b, c를 세 변의 길이로 갖는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 둔각삼각형
② a가 빗변인 직각삼각형
③ b가 빗변인 직각삼각형
④ $a = b$인 이등변삼각형
⑤ $b = c$인 이등변삼각형

해설

주어진 식을 정리하면
$x^2 - 2bx + a^2 + c^2 = 0$이
방정식이 중근을 가지므로
$\frac{D}{4} = (-b)^2 - (a^2 + c^2) = 0$
$\therefore b^2 = a^2 + c^2$
따라서 b가 빗변인 직각삼각형이다.

15. a가 실수일 때, $f(x)=x^2+2(a+1)x+a^2$, $g(x)=x^2+2ax+(a-1)^2$ 에 대하여 x에 대한 두 이차방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① $f(x)=0$이 실근을 가지면 $g(x)=0$도 실근을 가진다.

② $f(x)=0$이 실근을 가지면 $g(x)=0$은 허근을 가진다.

③ $f(x)=0$이 허근을 가지면 $g(x)=0$도 허근을 가진다.

④ $g(x)=0$이 실근을 가지면 $f(x)=0$은 허근을 가진다.

⑤ $g(x)=0$이 허근을 가지면 $f(x)=0$은 실근을 가진다.

해설

방정식 $f(x)=0$과 $g(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$\frac{D_1}{4}=(a+1)^2-a^2=2a+1$,

$\frac{D_2}{4}=a^2-(a-1)^2=2a-1$

모든 실수 a에 대하여

$2a+1>2a-1$,

즉, $D_1>D_2$이므로 $D_1<0$이면 $D_2<0$

16. x에 관한 이차방정식 $x^2-2(m-a+1)x+m^2+a^2-2b=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 $a,\ b$의 값을 정하면?

① $a=-1,\ b=\dfrac{1}{2}$
② $a=1,\ b=\dfrac{1}{2}$
③ $a=-1,\ b=-\dfrac{1}{2}$
④ $a=1,\ b=-\dfrac{1}{2}$
⑤ $a=1,\ b=-1$

해설

$\dfrac{D}{4}=0$이므로

$(m-a+1)^2-(m^2+a^2-2b)=0$,

m에 관하여 정리하면

$2(-a+1)m-2a+2b+1=0$

m에 관계없이 성립하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+2b+1=0$

$\therefore\ a=1,\ b=\dfrac{1}{2}$

17. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, x에 대한 이차방정식 $x^2-bx+a=0$의 두 근을 $\alpha+1,\ \beta+1$이라 한다. 이 때, 상수 $a,\ b$의 곱은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로
$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b\cdots\cdots$㉠
또, $x^2-bx+a=0$ 의 두 근이 $\alpha+1,\ \beta+1$이므로
$(\alpha+1)+(\beta+1)=b,\ (\alpha+1)(\beta+1)=a$
즉, $\alpha+\beta+2=b,\ \alpha\beta+\alpha+\beta+1=a\cdots\cdots$㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $-a+2=b,\ b-a+1=a$
$\therefore a=1,\ b=1$
$\therefore ab=1$

18. 이차방정식 $x^2+2ax+3b=0$ 의 한 근이 $3-ai$ 일 때, 실수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?(단, $a \neq 0, i=\sqrt{-1}$)

① 12 ② 6 ③ -6 ④ -12 ⑤ -18

해설

이차방정식 $x^2+2ax+3b=0$ 의 한 근이 복소수 $3-ai$ 이므로,
다른 한 근은 켤레근인 $3+ai$ 이다.
두 근의 합은 $(3-ai)+(3+ai)=-2a$ 이므로,
$-2a=6 \quad \therefore\ a=-3$ 이다.
두 근의 곱은 $(3-ai)(3+ai)=3b$ 이므로,
$9+a^2=3b,\ 9+(-3)^2=18=3b \quad \therefore\ b=6$
$\therefore\ ab=-18$

19. 다음 중 이차함수 $y = x^2 - 2(a+b)x + ab$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은? (단,a, b 는 실수)

① 항상 x 축과 만난다.

② 항상 x 축과 만나지 않는다.

③ a, b 가 양의 실수일 때, x 축과 두 점에서 만난다.

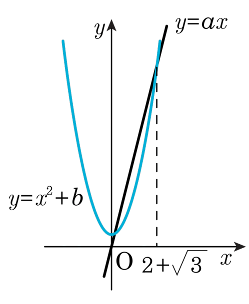
④ a, b 가 음의 실수일 때, x 축과 접한다.

⑤ a, b 가 음이 아닌 실수일 때, x 축과 만나지 않는다.

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(a+b)x + ab$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 개수는 이차방정식 $x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$ 의 실근의 개수와 같다.
이차방정식 $x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = (a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2$
$= \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$ 이므로 임의의 실수 a, b 에 대하여 항상 실근을 갖는다.
따라서, 이차함수 $y = x^2 - 2(a+b)x + ab$ 의 그래프는 항상 x 축과 만난다.

20. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = x^2 + b$ 의 그래프와 직선 $y = ax$ 가 서로 두 점에서 만나고, 한 교점의 x 좌표가 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, $a + b$ 의 값은?(단, a, b 는 유리수)



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 + b = ax$,
즉 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이다.
이때, a, b 는 모두 유리수이므로
방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이면
다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$ 이다.
따라서 근과 계수와의 관계에 의하여
$a = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$,
$b = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$
$\therefore\ a + b = 5$

21. 축의 방정식이 $x = 1$ 이고, 점 $(-2,\ 0)$ 을 지나며 y 절편이 3 인 이차 함수의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{27}{8}$

해설

축이 $x = 1$ 이므로 $y = a(x-1)^2 + q$
두 점 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 3)$ 을 지나므로

$0 = a(-2-1)^2 + q,\ 9a + q = 0$
$3 = a(0-1)^2 + q, a + q = 3$
두 식을 연립하여 풀면
$a = -\frac{3}{8},\ q = \frac{27}{8}$
$y = -\frac{3}{8}(x-1)^2 + \frac{27}{8}$

따라서 $x = 1$ 일 때, 최댓값 $\frac{27}{8}$ 을 갖는다.

22. 이차함수 $y = -x^2 + 2kx + 2k$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y = -x^2 + 2kx + 2k$
$= -(x^2 - 2kx) + 2k$
$= -(x-k)^2 + k^2 + 2k$

최댓값 $M = k^2 + 2k = (k+1)^2 - 1$

따라서 M 의 최솟값 -1 이다.

23. $x+y=3, x \geq 0, y \geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$y=3-x \geq 0$

$\therefore\ 0 \leq x \leq 3$

$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$

$x=1$ 일 때, $m=6$

$x=3$ 일 때, $M=18$

$\therefore\ M-m=12$

24. x, y가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$
$= -(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 3$
$= -(x - 1)^2 - (y - 2)^2 + 8$
x, y는 실수이므로 $(x - 1)^2 \geq 0$, $(y - 2)^2 \geq 0$
따라서 $2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$은
$x - 1 = 0$, $y - 2 = 0$일 때 최댓값 8을 갖는다.

25. 둘레의 길이가 20 cm 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}a(20-2a) = a(10-a) = -a^2+10a$$
$$= -(a^2-10a+25)+25$$
$$= -(a-5)^2+25$$

$a=5,\ b=25$

따라서 $a+b=30$ 이다.

26. 구간 $0 < x < 5$에서 $x = \dfrac{1}{x - [x]}$를 만족시키는 x의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

① 2개　　② 3개　　③ 4개
④ 5개　　⑤ 무수히 많다.

해설

$x - [x] \neq 0$이므로 x는 정수가 아니다.
주어진 식의 양변에 $x - [x]$를 곱하면
$x^2 - x[x] - 1 = 0$
(i) $0 < x < 1$일 때 $[x] = 0$, $x^2 - 1 = 0$
$\therefore\ x = \pm 1$, 이 값은 $0 < x < 1$에 속하지 않는다.
$\therefore$ 해가 없다.
(ii) $1 < x < 2$일 때 $[x] = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$
$\therefore\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
$1 < x < 2$이므로 $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
(iii) $2 < x < 3$일 때 $[x] = 2$
$\therefore\ x^2 - 2x - 1 = 0$
$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$
$2 < x < 3$이므로 $x = 1 + \sqrt{2}$
(iv) $3 < x < 4$일 때 $[x] = 3$
$\therefore\ x^2 - 3x - 1 = 0$
$\therefore\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$
$3 < x < 4$이므로 $x = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$
(v) $4 < x < 5$일 때 $[x] = 4$
$\therefore\ x^2 - 4x - 1 = 0$
$x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$
$4 < x < 5$이므로 $x = 2 + \sqrt{5}$
(i), (ii), (iii), (iv), (v)에서 x의 개수는 4개

27. x에 관한 이차방정식 $x^2-k(k+3)x+k^2-1=0$의 두 근 중 단 하나만이 양이 되기 위한 실수 k의 조건은?

① $-1<k\le 1$　② $-1<k<1$　③ $0<k\le 2$
④ $-1\le k\le 0$　⑤ $-1\le k\le 1$

해설

이차방정식의 두 근을 α, β라 하자.
(i) 한 근은 양, 다른 근은 음일 때,
$\alpha\beta=k^2-1<0,\ (k+1)(k-1)<0$
$\therefore\ -1<k<1$
(ii) 한 근은 양, 다른 근은 0일 때,
$\alpha+\beta=k(k+3)>0 \quad \therefore\ k>0,\ k<-3$
$\alpha\beta=k^2-1=0 \quad \therefore\ k=\pm 1$
따라서, $k=1$
그러므로, (i)과 (ii)에서 $-1<k\le 1$

28. $x = 1$ 일 때 최솟값 1 을 갖고, y 절편이 2 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y = a(x-p)^2 + q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$y = a(x-1)^2 + 1$
$= a(x^2 - 2x + 1) + 1$
$= ax^2 - 2ax + a + 1$
$a + 1 = 2,\ a = 1$
$y = (x-1)^2 + 1$
$p = 1, q = 1$
$\therefore apq = 1$

29. 밑면의 길이와 높이의 합이 28 인 삼각형의 넓이가 최대가 될 때 밑변과 높이의 길이를 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 밑변 : 14

▷ 정답 : 높이 : 14

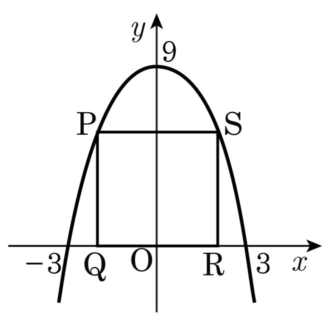
해설

삼각형의 넓이를 y 라 하면, 밑변을 x , 높이는 $28-x$ 라 두면

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x(28-x) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 14x \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 28x + 196 - 196) \\ &= -\frac{1}{2}(x-14)^2 + 196 \end{aligned}$$

따라서 밑변은 14 , 높이는 14 이다.

30. 다음의 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 에 내접하는 직사각형 PQRS 가 있다. PQRS 의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

먼저 이차함수의 식을 구하면
$(0, 9)$ 를 지나므로 $y = mx^2 + 9$,
$(3, 0)$ 을 지나므로 $y = -x^2 + 9$
$\mathrm{R}(a, 0)$ 이라 하면 (단, $0 < a < 3$), $\mathrm{S}(a, -a^2 + 9)$
직사각형의 가로는 $2a$, 세로는 $-a^2 + 9$
둘레는 $2\{2a + (-a^2 + 9)\} = -2(a - 1)^2 + 20$
따라서 둘레의 최댓값은 20

31. x에 대한 이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 직선 $y = 2ax - a^2$에 접할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k$ 의 그래프가 직선 $y = 2ax - a^2$ 에 접하므로

이차방정식 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k = 2ax - a^2$

즉, $x^2 - 2(k+a)x + k^2 + a^2 - 4k = 0$ 의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4} = (k+a)^2 - \left(k^2 + a^2 - 4k\right) = 2ak + 4k = (2a+4)k$ 이고

k 의 값에 관계없이 $D = 0$ 이어야 하므로

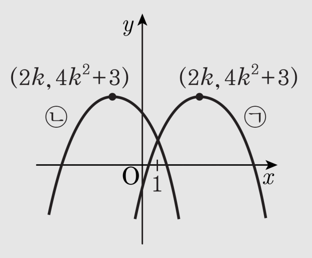
$2a + 4 = 0$

$\therefore a = -2$

32. $x \geq 1$ 에 대하여 $y = -x^2 + 4kx + 3$ 이 최댓값 11 을 가질 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $\frac{9}{4}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설



$y = -x^2 + 4kx + 3 = -(x-2k)^2 + (4k^2+3)$

㉠ 경우 : $2k \geq 1 \Rightarrow k \geq \frac{1}{2}$

최대 : $4k^2 + 3 = 11$, $k^2 = 2$

$\therefore k = \sqrt{2}$ $\left(\therefore k \geq \frac{1}{2}\right)$

㉡ 경우 : $2k \leq 1 \Rightarrow k \leq \frac{1}{2}$

최대 : $y = -1 + 4k + 3 = 4k + 2 = 11$

$k = \frac{4}{9}$ 인데 $k \leq \frac{1}{2}$ 이므로

$\therefore$ 해가 존재하지 않음.

$\therefore k = \sqrt{2}$

33. x 가 실수일 때, $f(x) = (x^2 + 4x + 6)(x^2 + 4x + 2) + 2x^2 + 8x + 10$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$t = x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2 - 2 \geq -2$

$$\begin{aligned} \therefore\ f(x) &= g(t) = (t + 4)t + 2t + 6 \\ &= t^2 + 6t + 6 = (t + 3)^2 - 3 \end{aligned}$$

$\therefore g(t)$ 는 $t = -2$ 일 때, 최솟값 -2 $(\because t \geq -2)$