1. 다항식 $f(x)$를 두 일차식 $x-1$, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$　　② $-x+3$　　③ $x-3$

④ $-x-3$　　⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 각각 2, 1이므로
$f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$를 대입하면
$f(1)=a+b=2$, $f(2)=2a+b=1$
두 식을 연립하여 구하면 $a=-1, b=3$
$\therefore$구하는 나머지는 $-x+3$

2. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x - 5$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned} y &= -3x^2 + 6x - 5 \\ &= -3(x^2 - 2x + 1 - 1) - 5 \\ &= -3(x - 1)^2 - 2 \end{aligned}$$

$x = 1$ 일 때, 최댓값 -2 를 갖는다.

3. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore \ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow \quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
$\therefore$ ①이 조건에 맞다

4. 연립부등식 $\begin{cases} 1-3x \geq -5 \\ 4x-a > 2(x-2) \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a \geq 8$　　② $a < 4$　　③ $\frac{1}{2} \leq a < 2$

④ $4 \leq a < 8$　　⑤ $-4 \leq a < 8$

해설

$1-3x \geq -5,\ 2 \geq x$

$4x-a > 2(x-2),\quad x > \frac{a-4}{2}$

해가 없으므로 $\frac{a-4}{2} \geq 2,\quad a \geq 8$

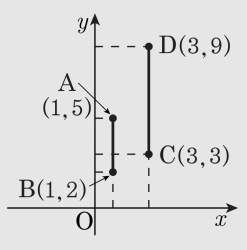
5. $f(x) = ax + b$ 이고 $2 \le f(1) \le 5$, $3 \le f(3) \le 9$ 라고 할 때, a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 2　　② $\frac{5}{2}$　　③ 3　　④ $\frac{7}{2}$　　⑤ 4

해설

다음 그림과 같이 $f(x) = ax + b$ 가 선분 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 를 동시에 지나야 하고

a는 $y = f(x)$ 의 기울기이므로



a의 최댓값은 $\overline{BD}$ 의 기울기이고

a의 최솟값은 $\overline{AC}$ 의 기울기이다.

$\overline{BD}$의 기울기$= \frac{9-2}{3-1} = \frac{7}{2}$

$\overline{AC}$의 기울기$= \frac{3-5}{3-1} = -1$

$\therefore$ 최댓값$+$최솟값$= \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}$

(다른 풀이) $f(1) = a + b$, $f(3) = 3a + b$ 이므로

$\therefore \ -1 \le a \le \frac{7}{2}$

6. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$일 때, $2A + B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\ &= (2a + 4b) + (2a + 3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a + (4b + 2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a + (2a + 4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a + 2a) + (4b + 3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2 + 2)a + (4 + 3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a + 7b \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙

7. $16x^4 - 625y^4$ 을 옳게 인수분해한 것은?

① $(x+5y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)$

② $(2x+y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)$

③ $(2x+5y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)$

④ $(x+5y)(x-5y)(4x^2+25y^2)$

⑤ $(2x+5y)(x-y)(4x^2+25y^2)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (4x^2)^2 - (25y^2)^2 \\ &= (4x^2+25y^2)(4x^2-25y^2) \\ &= (2x+5y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)\end{aligned}$$

8. x^2+ax-9와 x^2+bx+c의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9이다. $a-b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = x^2 + ax - 9 = Gp$

$B = x^2 + bx + c = Gq$라 하면

$A + B = (p+q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x+1)(x-3)$

$L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1)$

$= (x-1)(x^2-9) = (x-1)(x+3)(x-3)$

따라서, $G = x-3$, $p = x+3$, $q = x-1$이다.

$\therefore\ A = (x+3)(x-3) = x^2 - 9$

$B = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

$\therefore\ a = 0,\ b = -4,\ c = 3$

$\therefore\ a - b + c = 7$

9. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2 - 5x - 3$이고 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$일 때, 두 다항식의 최대공약수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x - 3$

해설

두 다항식을 A, B라고 하면

$A + B = (a + b)G$, $L = abG$,

즉, 최대공약수는 두 식의 합과 최소공배수의 공약수이다.

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 1)(x + 2)$

$2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$

$\therefore\ G = x - 3$

10. 200 원짜리 자두와 500 원짜리 복숭아을 합하여 9 개를 사는데, 그 값이 2800 원 이상 3600 원 이하가 되게 하려고 한다. 복숭아는 최대 몇 개까지 살 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

자두의 개수 : $(9-x)$ 개, 복숭아의 개수 : x 개

$2800 \le 200(9-x)+500x \le 3600$

$$\begin{cases} 2800 \le 200(9-x)+500x \\ 200(9-x)+500x \le 3600 \end{cases}$$

$\therefore \frac{10}{3} \le x \le 6$

따라서 살 수 있는 복숭아의 최대 개수는 6 개이다.

11. 두 직선 $l : y = mx + n$, $l' : y = m'x + n'$ 에 대하여 옳은 것을 고르면?

① $l // l'$ 이면 $n = n'$ 이다.

② $l \perp l'$ 이면 $mm' = 1$ 이다.

③ $n = n'$ 이면 l과 l'은 $(n, 0)$ 에서 만난다.

④ $l = l'$ 이면 두 직선사이의 거리는 0 이다.

⑤ $m = m'$ 이면 두 직선은 만나지 않는다.

해설

① $l // l' \quad \Rightarrow \quad m = m'$
② $l \perp l' \quad \Rightarrow \quad mm' = -1$
③ $n = n' \quad \Rightarrow$ 두 직선은 $(0,\ n)$ 에서 만난다.
④ 두 직선이 일치하면 두 직선 사이 거리는 0 이다. (참)
⑤ $m = m',\ n = n'$ 이면 두 직선은 만난다.

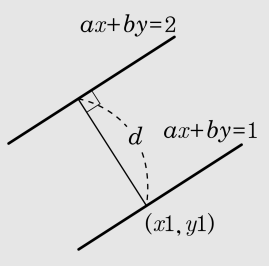
12. 평행한 두 직선 $ax+by=1$, $ax+by=2$ 사이의 거리는?

① $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ③ $\dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}$
④ $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ⑤ $\dfrac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}$

해설

두 직선은 서로 평행하므로 직선 $ax+by=1$
위의 한 점을 (x_1, y_1) 이라 놓으면
$ax_1+by_1=1$ 점 (x_1, y_1) 에서
직선 $ax+by=2$ 까지의 거리 d 는

$$d=\frac{|ax_1+by_1-2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$=\frac{|1-2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



13. 좌표평면에서 점 $(3,-1)$을 점 $(1,2)$로 옮기는 평행이동에 의해 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$은 원 $x^2+y^2=1$로 옮겨진다. 이 때, 상수 a,b,c의 합 $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

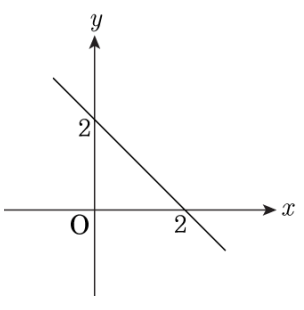
해설

점 $(3,-1)$을 점 $(1,2)$로 옮기는 평행이동은
x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
$x^2+y^2+ax+by+c=0$에서
x 대신에 $x+2$를, y 대신에 $y-3$을 대입하면
$(x+2)^2+(y-3)^2+a(x+2)+b(y-3)+c=0$
정리하면
$x^2+y^2+(a+4)x+(b-6)y+2a-3b+c+13=0$
이 식과 $x^2+y^2=1$이 일치하므로
$a+4=0, b-6=0, 2a-3b+c+13=-1$
$\therefore a=-4,\ b=6,\ c=12$
$\therefore a+b+c=14$

해설

원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면
$(x-2)^2+(y+3)^2=1$
전개하면 $x^2+y^2-4x+6y+12=0$
$\therefore a=-4,\ b=6,\ c=12$

14. 다음 그림은 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프이다. 이차함수 $y = \frac{1}{2}ax^2 + bx + 3$ 의 그래프의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

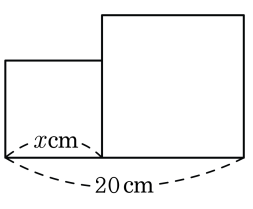
해설

기울기 $a = -1$, y 절편 $b = 2$

$$y = \frac{1}{2}ax^2 + bx + 3$$
$$= -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$$
$$= -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 5$$

$x = 2$ 일 때, 최댓값은 5 이다.

15. 다음 그림과 같이 길이가 20cm 인 선분을 두 부분으로 나누어, 그 각각을 한 변으로 하는 정사각형 두 개를 만들려고 한다. 두 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.



▶ 답 : _____ cm

▷ 정답 : 10 cm

해설

작은 정사각형의 한 변의 길이를 x , 큰 정사각형의 한 변의 길이를 $20 - x$,
넓이를 y 라고 하면

$$\begin{aligned} y &= x^2 + (20 - x)^2 \\ &= 2x^2 - 40x + 400 \\ &= 2(x - 10)^2 + 200 \end{aligned}$$

따라서 $x = 10$ 일 때, 최솟값 200 을 갖는다.

16. 방정식 $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x - 4y + 20 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 값은?

① $x = 2,\ y = 4$　② $x = 4,\ y = 2$　③ $x = -1,\ y = 2$
④ $x = 2,\ y = -1$　⑤ $x = -2,\ y = 1$

해설

판별식을 이용하기 위해 준식을 x 에 관하여 정리하면,
$2x^2 - 4(y+2)x + 5y^2 - 4y + 20 = 0 \cdots$ ①
①이 실근을 가지므로 $\frac{D}{4} \geq 0$ 에서
$4(y+2)^2 - 10y^2 + 8y - 40 \geq 0$
$6y^2 - 24y + 24 \leq 0$
$6(y^2 - 4y + 4) \leq 0$
$6(y-2)^2 \leq 0$　　$\therefore y = 2$ ($\because$ y 는 실수)
$y = 2$ 를 ①에 대입하면,
$2x^2 - 16x + 32 = 0,\ \ 2(x-4)^2 = 0$
$\therefore\ x = 4$

17. 10% 의 소금물 250 g 이 있다. 이 소금물에서 물을 x g만큼 증발시켜서 농도를 25% 이상 50% 이하로 만들려고 한다. 이 때 x의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $150 \le x \le 200$

해설

10% 의 소금물 250 g 의 소금의 양은

$\frac{10}{100} \times 250 = 25(\text{g})$ 이다.

따라서 물 x g 을 증발시켰을 때의 농도를 나타내면 $\frac{25}{250-x} \times 100$ 이다. 이 값이 25% 이상 50% 이하 이므로 $25 \le \frac{25}{250-x} \times 100 \le 50$ 이고,

이를 연립방정식으로 나타내면

$$\begin{cases} 25 \le \frac{25}{250-x} \times 100 \\ \frac{25}{250-x} \times 100 \le 50 \end{cases}$$

이다. 간단히 나타내면

$$\begin{cases} x \ge 150 \\ x \le 200 \end{cases}$$

이다. 따라서 x 의 범위는 $150 \le x \le 200$ 이다.

18. 직선 $x+y=1$은 두 점, $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 7)$을 잇는 선분 AB를 어떤 비로 내분하는가?

① 3 : 2　② 2 : 3　③ 1 : 1　④ 2 : 1　⑤ 1 : 2

해설

선분 AB를 $m\ :\ n$ 으로 내분하는 점을 P 라 하면,
점 P 의 좌표는

$$\left(\frac{m\cdot 0+n\cdot(-2)}{m+n},\ \frac{m\cdot 7+n\cdot 0}{m+n}\right)=\left(\frac{-2n}{m+n},\ \frac{7m}{m+n}\right)$$

그런데, 점 P 는 직선 $x+y=1$ 위의 점이므로 대입하면,

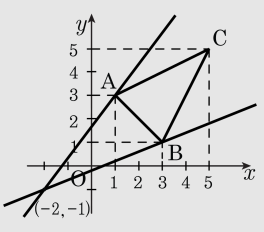
$$\frac{-2n}{m+n}+\frac{7m}{m+n}=1,\ -2n+7m=m+n,\ 2m=n$$

$\therefore\ m:n=1:2$

19. 세 점 A(1, 3), B(3, 1), C(5, 5) 를 꼭지점으로 하는 △ABC 와 직선 $kx - y + 2k - 1 = 0$ 이 만난다. 상수 k 의 최대값을 M , 최소값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설



직선의 방정식 $ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0$ 은
k 의 값에 관계없이 항상 두 직선
$ax + by + c = 0$ 과 $a'x + b'y + c' = 0$
의 교점을 지난다.
그림과 같이 직선 $kx - y + 2k - 1 = 0$
즉 $y = k(x + 2) - 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점$(-2, -1)$ 을 지나므로
이 직선이 $\overline{AB}$ 와 만날 때, 삼각형과 만난다.

1) 점 A 를 지날 때, $3 = k(1 + 2) - 1$, $k = \frac{4}{3}$

2) 점 B 를 지날 때, $1 = k(3 + 2) - 1$, $k = \frac{2}{5}$

따라서 $\frac{2}{5} \le k \le \frac{4}{3}$ 일 때, 주어진 직선은 삼각형과 만난다.

$\therefore \frac{M}{m} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{10}{3}$

20. 원 $x^2+y^2-6ax+2ay+20a-10=0$ 은 정수 a 의 값에 관계없이 정점을 지난다. 그 정점을 구하면?

① $(2,\ -1)$　② $(3,\ -2)$　③ $(2,\ -2)$
④ $(-1,\ -2)$　⑤ $(3,\ -1)$

해설

a 에 대한 항등식 꼴로 나타내면
$a(-6x+2y+20)+(x^2+y^2-10)=0$

$$\begin{cases} -6x+2y+20=0 \rightarrow y=3x-10\cdots ① \\ x^2+y^2=10\cdots ② \end{cases}$$

①, ②를 연립하면
$x^2+(3x-10)^2=10$
$x^2-6x+9=0 \rightarrow (x-3)^2=0$
$\therefore\ x=3,\ y=-1$

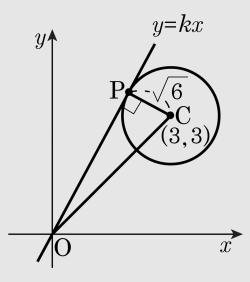
21. $(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 최댓값은?

① $3+2\sqrt{2}$　　② $2+\sqrt{3}$　　③ $3\sqrt{3}$

④ 6　　⑤ $6+2\sqrt{3}$

해설

$(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 은 중심이$(3,3)$,
반지름이 $\sqrt{6}$ 인 원이고
$\mathrm{P}(x,y)$ 에 대하여
$\frac{y}{x}$ 의 최댓값은 $\frac{y}{x}=k$, $y=kx$ 이므로
$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 기울기의 최댓값이다.
$y=kx$ 라 두고 원에 접하는 경우로 계산하면
$kx-y=0$ 에서 중심 (3, 3) 까지의 거리가 원의 반지름 $\sqrt{6}$ 과 같다.



$\frac{|3k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{6}$, $k^2-6k+1=0$

$k=3\pm2\sqrt{2}$ 이므로, 최댓값은 $3+2\sqrt{2}$ 이다.

22. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 의 공통접선의 방정식을 구하면?

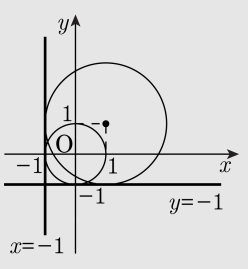
① $x=-2,\ y=-1$　　② $x=1,\ y=1$

③ $x=-1,\ y=1$　　④ $x=1,\ y=-1$

⑤ $x=-1,\ y=-1$

해설

그림을 그려보면 두 개의 공통접선이 존재하고 그 식은 각각
$x=-1,\ y=-1$



23. 함수 $y = x^2 - q$, $y = -x^2 + q$ 의 그래프에 의하여 둘러싸인 부분에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값이 21 일 때, q 의 값을 구하여라. (단, $q > 0$)

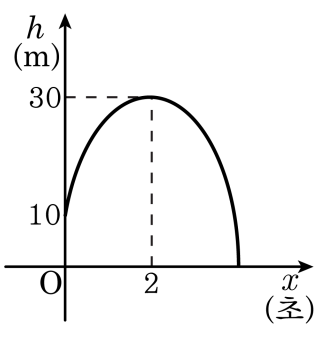
▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

포물선의 축이 $x = 0$ 이므로 직사각형은 직선 $x = 0$ 에 대하여 대칭이다.
직사각형이 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 $-t$, t 라 하면 가로의 길이는 $2t$,
세로의 길이는 $(-t^2 + q) - (t^2 - q) = -2t^2 + 2q$
이므로 직사각형의 둘레의 길이는
$2(-2t^2 + 2q + 2t) = -4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 4q + 1$ 이다.
따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 $4q+1 = 21$ 이므로 $q = 5$ 이다.

24. 다음 그림은 지면으로부터 10m 높이에서 던져 올린 물체의 운동을 나타내는 그래프이다. 던진 후 몇 초 만에 다시 지면으로 떨어지는가?



① 4 초　　② $(\sqrt{6}-2)$ 초　　③ $(2+\sqrt{6})$ 초

④ 5 초　　⑤ 6 초

해설

$y=a(x-2)^2+30$ 이고, $(0,\ 10)$ 을 지난다.

$10=4a+30$

$\therefore a=-5$

$\therefore y=-5(x-2)^2+30=-5x^2+20x+10$

$x^2-4x-2=0$

$\therefore x=2+\sqrt{6}\ \ (\because x>0)$

25. 실수 x가 $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$을 만족시킬 때, x^2+3x의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

분명히 $x \neq 0$이므로
양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}^2$$

$$=\left(x^2+\frac{1}{x}^2\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$\therefore \left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right)=0$$

$\therefore (x^2+3x+1)(x^2-x+1)=0$
x는 실수이므로 $x^2+3x+1=0$
$\therefore x^2+3x=-1$

26. 두 이차방정식 $x^2+ax+2b=0$, $x^2+bx+2a=0$이 공통근을 가질 경우에 대한 다음 설명 중 옳은 것으로만 짝지어진 것은? (단, 중근은 1개의 근으로 본다.)

(가) $a=0$이면 두 개의 공통근을 갖는다. (나) $a+b=-2$이면 오직 한 개의 공통근을 갖는다. (다) $a=b$이거나 $a+b=-2$이면 적어도 한 개의 공통근을 갖는다. (라) $a+b=-2$이고 $a\neq-1$이면 오직 한 개의 공통근을 갖는다.

① (가), (나), (다)　② (가), (나)　③ (다)
④ (다), (라)　⑤ (라)

해설

(가) $a=0$일 경우 공통근은 하나뿐
(나) $a=-1$, $b=-1$일 경우 $x=-1, 2$의 두 개의 공통근을 갖는다.
(다) $a=b$이면 두 이차방정식이 같아지므로 공통근을 갖는다.
$a+b=-2$이면 두 이차방정식은 모두 $x=2$라는 공통근을 갖는다.
(라) $a+b=-2$일 때,
$x^2+ax+2b=0 \Leftrightarrow x^2+ax+2(-2-a)=0$
$\Leftrightarrow (x-2)(x+a+2)=0$
$\therefore\ x=2$ 또는 $-a-2$
$x^2+bx+2a=0$
$\Leftrightarrow x^2+(-2-a)x+2a=0$
$\Leftrightarrow (x-2)(x-a)=0$
$\therefore\ x=2$ 또는 a
그런데, $a\neq-1$이므로 $-a-2\neq a$
$\therefore$공통근은 $x=2$하나뿐이다.

27. 세 자연수의 평균이 5 이하이고, 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 $6:9:11$ 인 세 자연수 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

세 자연수를 각각 $x,\ y,\ z$ 라 하면 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 $6:9:11$ 이므로

$x+y=6k$

$y+z=9k$

$z+x=11k$

각 변끼리 더하면 $x+y+z=13k$

따라서 $x=4k,\ y=2k,\ z=7k$

그런데 세 수의 평균이 5 이하이므로

$\frac{x+y+z}{3} \le 5$ 에서 $13k \le 15$

$\therefore\ k \le \frac{15}{13}$

k 는 자연수이므로 $k=1$

따라서 $x=4,\ y=2,\ z=7$ 이고,

이 중 가장 큰 수는 7 이다.

28. 2 % 의 소금물 200g 이하와 2.5 % 의 소금물 200g 이하를 섞은 후, 여기에 3.5 % 의 소금물을 더해서 3 % 의 소금물 600g 을 만들려고 한다. 이 때, 3.5 % 의 소금물을 가능한 한 많이 섞으려고 한다면 몇 g 까지 섞을 수 있겠는가?

▶ 답 : _____ g

▷ 정답 : 400 g

해설

2 % 의 소금물을 xg , 2.5 % 의 소금물을 yg , 3.5 % 의 소금물을 zg 사용하여 3 % 의 소금물 600g 을 만들었다고 한다면

$x + y + z = 600 \cdots$ ①

$0.02x + 0.025y + 0.035z = 600 \times 0.03$

$4x + 5y + 7z = 3600 \cdots$ ②

①, ② 에 의하여 $-x + 2z = 600$

$\therefore x = 2z - 600$

그런데 $0 \le x \le 200$ 이므로

$0 \le 2z - 600 \le 200$

$\therefore 300 \le z \le 400 \cdots$ ③

또 ①, ② 에 의하여 $y + 3z = 1200$

$\therefore y = 1200 - 3z$

그런데 $0 \le y \le 200$ 이므로

$0 \le 1200 - 3z \le 200$

$\therefore \frac{1000}{3} \le z \le 400 \cdots$ ④

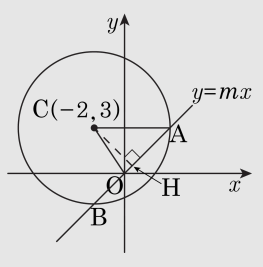
③, ④ 에 의해서 $\frac{1000}{3} \le z \le 400$

따라서 3.5 % 의 소금물은 최대 400g 까지 섞을 수 있다.

29. 직선 $y = mx$ 와 원 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ 의 두 교점을 A, B 라 할 때, 현 AB 의 길이가 최소가 되도록 하는 상수 m 의 값은?

① $-\frac{3}{2}$　② $-\frac{2}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{3}{2}$

해설



그림과 같이 원의 중심 C(−2, 3) 에서
직선 $y = mx$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\triangle$CAH 에서 $\overline{AH}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CH}^2$
$= 25 - \overline{CH}^2$

따라서 $\overline{CH}$ 가 최대일 때, $\overline{AH}$ 가 최소이다.

$\triangle$COH 에서 $\overline{CH}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{OH}^2$

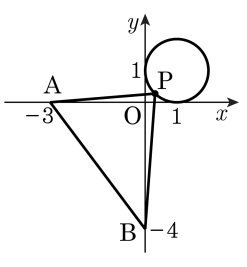
$\overline{CH}$ 가 최대가 되기 위해서는

$\overline{CH} = \overline{CO}$ $(\overline{OH} = 0)$ 일 때이므로

$\overline{CO} \perp \overline{AB}$

직선 OC 의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이므로 $m = \frac{2}{3}$

30. 다음 그림과 같이 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 위의 임의의 점 P 와 두 점 $\mathrm{A}(-3,0)$, $\mathrm{B}(0,-4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABP 의 넓이의 최솟값은?



① $\frac{21}{5}$　② $\frac{31}{5}$　③ 7　④ $\frac{15}{2}$　⑤ 8

해설

$\triangle$ABP 의 넓이가 최소이려면 $\triangle$ABP 의 높이,
즉 점 P 에서 직선 AB 에 이르는 거리가 최소이어야 한다.

이때, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

직선 AB 의 방정식은 $y=-\frac{4}{3}x-4$,

즉, $4x+3y+12=0$ 이고, 원의 중심 $(1,1)$ 에서 직선 AB 에 이르는 거리는

$\frac{|4+3+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{19}{5}$ 이므로

점 P 에서 직선 AB 에 이르는 거리의 최솟값은

$\frac{19}{5}-1=\frac{14}{5}$

따라서, $\triangle$ABP 의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{14}{5}=7$