

1. 다항식 $f(x)$ 를 $2x^2 + 3x + 2$ 로 나누었더니 몫이 $3x - 4$ 이고, 나머지가 $2x + 5$ 이었다. 이 때, $f(1)$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 + 3x + 2)(3x - 4) + (2x + 5) \\ &= 6x^3 + 9x^2 + 6x - 8x^2 - 12x - 8 + 2x + 5 \\ &= 6x^3 + x^2 - 4x - 3 \\ \therefore f(1) &= 6 + 1 - 4 - 3 = 0 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 + 3x + 2)(3x - 4) + (2x + 5) \\ f(1) &= (2 + 3 + 2)(3 - 4) + (2 + 5) = -7 + 7 = 0 \end{aligned}$$

2. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - k$ 가 $x - 2$ 를 인수로 가질 때, k 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$ 를 인수로 갖는다는 것은 $f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어진다는 뜻이다.

즉, $f(2) = 0$ 을 만족시키는 k 를 구하면,

$$f(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 - k = 0$$

$$\therefore k = 6$$

3. 세 개의 다항식 $x^3 + ax + b$, $x^3 + cx^2 + a$, $cx^2 + bx + 4$, 의 공약수 중 하나가 $x - 1$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

- ① 2 ② -2 ③ 3 ④ -3 ⑤ 4

해설

$$f(x) = x^3 + ax + b \rightarrow f(1) = 1 + a + b = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$g(x) = x^3 + cx^2 + a \rightarrow g(1) = 1 + c + a = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$h(x) = cx^2 + bx + 4 \rightarrow h(1) = c + b + 4 = 0 \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \text{에서 } 2(a + b + c) + 6 = 0$$

$$\therefore a + b + c = -3$$

4. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2 - (1+3i)x - (2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1+i)x^2 - (1+3i)x - (2-2i)$
 $= (x^2 - x - 2) + (x^2 - 3x + 2)i$
순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분) $\neq 0$ 이어야 하므로
 $x^2 - x - 2 = 0$, $x^2 - 3x + 2 \neq 0$
(i) $x^2 - x - 2 = 0$ 에서 $(x+1)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 2$
(ii) $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2) \neq 0$
 $\therefore x \neq 1$ 또는 $x \neq 2$
따라서 (i), (ii)에 의하여 $x = -1$

5. 이차방정식 $x^2 + (k-4)x + k-1 = 0$ 이 중근을 가지도록 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
 $D = 0$ 일 때 중근을 가지므로
 $D = (k-4)^2 - 4(k-1) = k^2 - 12k + 20 = 0$ 에서
 $(k-2)(k-10) = 0$
따라서, $k = 2, k = 10$ 이므로 k 의 값은 12이다.

6. 이차함수 $y = x^2 + (k - 3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$

② $-1 < k < 8$

③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$

⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
 x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k - 3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
 $D = (k - 3)^2 - 4k < 0$
 $k^2 - 10k + 9 < 0, (k - 1)(k - 9) < 0$
 $\therefore 1 < k < 9$

7. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.

$$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$$

$$y = -(x - 9)^2 + 81$$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

8. 다음 삼차방정식의 정수해를 구하여라.

$x^3 - 1 = 0$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^3 - 1 = 0$ 에서 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ 정수해는 $x = 1$

9. $\frac{(2x-1)(2y-1)}{(2x-1)^2+(2y-1)^2} = -\frac{1}{2}$ 일 때, $x+y$ 의 값은?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$2x-1=u$, $2y-1=v$ 라 놓으면

$\frac{uv}{u^2+v^2} = -\frac{1}{2}$ 에서

$u^2+v^2 = -2uv$, $(u+v)^2 = 0$

$\therefore u+v = 0$

$(2x-1) + (2y-1) = 0$, $x+y = 1$

10. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ 일 때, $f\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right) + f\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned} & f\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right) + f\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right) \\ &= f(i^2) + f((-i)^2) \\ &= f(-1) + f(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

11. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}i}{2}$ 에 대하여 복소수 $w = \frac{z+1}{3z-2}$ 일 때, $w\bar{w}$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 1, \quad z\bar{z} = 2 \\ w\bar{w} &= \frac{z+1}{3z-2} \times \frac{\bar{z}+1}{3\bar{z}-2} \\ &= \frac{z\bar{z} + (z + \bar{z}) + 1}{9z\bar{z} - 6(z + \bar{z}) + 4} \\ &= \frac{2 + 1 + 1}{18 - 6 + 4} \\ &= \frac{4}{6} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

12. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} + \sqrt{-3}\sqrt{-12}$ 를 바르게 계산한 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -8

② $-8i$

③ $8i$

④ $6 + 2i$

⑤ $-6 - 2i$

해설

$$\text{준 식} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}i} + \sqrt{3}i \times \sqrt{12}i = \frac{2}{i} + 6i^2 = -2i - 6$$

13. $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + 2bx + 3a = 0$ 를 동시에 만족하는 x 는 -1 밖에 없을 때, 상수 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$x = -1$ 은 두 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$,

$x^2 + 2bx + 3a = 0$ 의 공통근이므로

$1 - a + b = 0$, $1 - 2b + 3a = 0$

두 식을 연립하여 풀면

$a = -3$, $b = -4$

$\therefore ab = 12$

14. 이차방정식 $x^2 + ax + (a - 4) = 0$ 의 근의 차가 최소가 되는 실수 a 의 값을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= -a, \quad \alpha\beta = a - 4 \\ \therefore (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (-a)^2 - 4(a - 4) \\ &= a^2 - 4a + 16 = (a - 2)^2 + 12 \\ \therefore \text{두 근의 차는 } a = 2 \text{일 때 최소}\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}|\alpha - \beta| &= \frac{\sqrt{D}}{|a|} \text{이므로} \\ |\alpha - \beta| &= \sqrt{a^2 - 4(a - 4)} = \sqrt{(a - 2)^2 + 12} \\ \therefore a = 2 \text{일 때, 두 근의 차가 최소}\end{aligned}$$

15. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x + 1) = 0$ 의 두 근의 합은?

- ① -1 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 2

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 a, b 라 하면 $a + b = 3$

$2x + 1 = t$ 라 하면 $x = \frac{t-1}{2}$

$f(2x + 1) = f(t) = 0$ 에서

$f(t) = 0$ 의 해가 $t = a, t = b$ 이므로

$f(2x + 1) = 0$ 의 해는 $x = \frac{a-1}{2}, \frac{b-1}{2}$ 이다.

$\therefore \frac{a-1}{2} + \frac{b-1}{2} = \frac{a+b-2}{2} = \frac{1}{2}$

16. 4차방정식 $x^4 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$ 을 $(x^2 + a)^2 - (2x + b)^2 = 0$ 꼴로 변형한 후 네 근을 얻었다. 다음 중 네 근에 포함되는 것은?

① $1 \pm \sqrt{3}i$

② $1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

③ $-1 \pm \sqrt{3}i$

④ $-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

⑤ $-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

해설

$$\begin{aligned} & (x^2 + a)^2 - (2x + b)^2 \\ &= x^4 + (2a - 4)x^2 - 4bx + a^2 - b^2 \\ &\text{이 식은 주어진 4차방정식과 같은 식이므로} \\ &2 = 2a - 4, 4 = -4b, 8 = a^2 - b^2 \\ &\therefore a = 3, b = -1 \\ &\text{따라서 주어진 4차방정식은} \\ &\text{다음과 같이 변형하면,} \\ &(x^2 + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 0 \\ &\therefore (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 2) = 0 \\ &\therefore x = 1 \pm \sqrt{3}i \text{ 또는 } x = -1 \pm i \end{aligned}$$

17. 다음 두 방정식이 공통근 α 를 갖는다. 이 때, $m + \alpha$ 의 값을 구하여라.

$$x^2 + (m + 2)x - 4 = 0, x^2 + (m + 4)x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 방정식의 공통근이 α 이므로
 $\alpha^2 + (m + 2)\alpha - 4 = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $\alpha^2 + (m + 4)\alpha - 6 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서 $-2\alpha + 2 = 0 \therefore \alpha = 1$
 $\alpha = 1$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $1 + m + 2 - 4 = 0$
 $\therefore m = 1$
 $\therefore m + \alpha = 2$

18. $x^3 - x^2 + 2 = a(x - p)^3 + b(x - p)^2 + c(x - p)$ 가 x 에 대한항등식이 되도록 실수 $a + b + c + p$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

양변에 $x = p$ 를 대입하면
 $p^3 - p^2 + 2 = 0$
 $(p + 1)(p^2 - 2p + 2) = 0 \therefore p = -1$
따라서 주어진 식은
 $x^3 - x^2 + 2 = a(x + 1)^3 + b(x + 1)^2 + c(x + 1)$
양변에 $x = 0$ 을 대입하면 $2 = a + b + c$
 $\therefore a + b + c + p = 1$

해설

$a(x - p)^3 + b(x - p)^2 + c(x - p)$
 $= (x - p) \{a(x - p)^2 + b(x - p) + c\}$
 $\therefore (x + 1)(x^2 - 2x + 2)$
 $= (x - p) \{a(x - p)^2 + b(x - p) + c\}$
양변을 비교하면, $x + 1 = x - p$,
 $x^2 - 2x + 2 = a(x - p)^2 + b(x - p) + c$
 $\therefore p = -1$
또 $x^2 - 2x + 2 = a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$
 $\hspace{10em} = ax^2 + (2a + b)x + a + b + c$
 $\therefore a = 1, 2a + b = -2, a + b + c = 2$
 $\therefore b = -4, c = 5$
따라서 $a = 1, b = -4, c = 5, p = -1$
 $\therefore a + b + c + p = 1$

19. $a - b = 1 + i, b - c = 1 - i$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 의 값은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

$a - b = 1 + i \cdots \cdots \textcircled{1}$

$b - c = 1 - i \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 계산하면 $a - c = 2$

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$= \frac{1}{2}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)$

$= \frac{1}{2}((1 + i)^2 + (1 - i)^2 + (-2)^2)$

$= \frac{1}{2}(1 + 2i - 1 + 1 - 2i - 1 + 4)$

$= 2$

20. 함수 $y = |x - 2| + 1$ 의 그래프가 직선 $y = mx + m$ 과 만나기 위한 양수 m 의 최솟값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

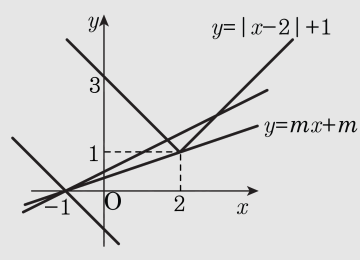
해설

$x \geq 2$ 일 때, $|x - 2| = x - 2$ 이므로

$$y = x - 2 + 1 = x - 1$$

$x < 2$ 일 때, $|x - 2| = -(x - 2)$ 이므로 $y = -x + 2 + 1 = -x + 3$

따라서, $y = |x - 2| + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



또, 직선 $y = mx + m = m(x + 1)$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 0)$ 을 지난다.

직선 $y = mx + m$ 이 점 $(2, 1)$ 을 지날 때, $1 = 2m + m \therefore m = \frac{1}{3}$

직선 $y = mx + m$ 이 직선 $y = -x + 3$ 과 평행할 때, $m = -1$

따라서, 직선 $y = mx + m$ 이 $y = |x - 2| + 1$ 의 그래프와 만나려면

가울기 m 의 값의 범위가

$m \geq \frac{1}{3}$ 또는 $m < -1$ 이어야 한다.

그런데 양수 m 이므로 $m \geq \frac{1}{3}$ 그러므로 구하는 m 의 최솟값은 $\frac{1}{3}$

이다.

21. x 에 관한 삼차방정식 $kx^3 + (1-2k)x^2 + (k-2)x - 2k = 0$ 의 근이 모두 실수가 되기 위한 실수 k 의 범위를 구하면?

- ① $0 < k \leq \frac{1}{2}$ ② $0 < k \leq 1$ ③ $-\frac{1}{2} < k \leq 0$
④ $-\frac{1}{2} < k \leq \frac{1}{2}$ ⑤ $0 < k \leq \frac{1}{2}$

해설

준식 = $(x-2)(kx^2 + x + k) = 0$ 에서
 $kx^2 + x + k = 0$ 이 실근이어야하므로
 $D = 1 - 4k^2 \geq 0$,
 $k \neq 0$ 이므로 $0 < |k| \leq \frac{1}{2}$

22. A, B 두 사람이 어떤 물건을 3 개월 할부로 공동 구입하였다. 첫달에 A, B 중 한 사람이 다른 사람보다 돈을 많이 지불하였기 때문에 두 번째 달부터는 전달에 많이 지불한 사람은 전달보다 20% 적은 금액을 지불하고, 적게 지불한 사람은 전 달보다 3000 원 많은 금액을 지불하기로 하였다. 금액을 모두 지불하고보니 A, B 는 전체 액수의 반씩을 부담하게 되었다. 이 물건을 사는 데 든 비용은 전부 얼마인가? (단, 두 번째 달의 B 의 지불금액은 A 의 지불금액보다 6000 원이 많았다.)

- ① 27000 원
- ② 30000 원
- ③ 81000 원
- ④ 162000 원
- ⑤ 570000 원

해설

첫달에 A, B 가 지불한 금액을 각각 x 원, y 원이라 하면 각자가 지불한 금액의 총합은 다음과 같다.

$A : x + 0.8x + (0.8x + 3000)$

$B : y + (y + 3000) + 0.8(y + 3000)$

따라서 $x + 0.8x + (0.8x + 3000) = y + (y + 3000) + 0.8(y + 3000) \cdots \cdots \textcircled{\small{\text{㉠}}}$

$0.8x + 6000 = y + 3000 \cdots \cdots \textcircled{\small{\text{㉡}}}$

또, $\textcircled{\small{\text{㉠}}}, \textcircled{\small{\text{㉡}}}$ 에서 $x = 30000, y = 27000$

따라서, A 가 지불한 금액은

$30000 + 0.8 \times 30000 + 0.8 \times 30000 + 3000 = 81000$

그런데 물건을 사는 데 든 총 비용은 한 사람이 지불한 금액의 2 배이다.

$\therefore (\text{지불한 총 금액}) = 81000 \times 2 = 162000(\text{원})$

23. 세 실수 a, b, c 가 $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, $a^3 + b^3 + c^3 = 24$ 를 만족시킬 때, $a^4 + b^4 + c^4 + 1$ 의 값을 구하면?

- ① 69 ② 70 ③ 71 ④ 72 ⑤ 73

해설

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3 \cdots \textcircled{1} \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 9 \cdots \textcircled{2} \\ a^3 + b^3 + c^3 &= 24 \cdots \textcircled{3} \text{ 이라 하면,} \\ \textcircled{2} \text{식에서} \\ a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 9 \\ 9 - 2(ab + bc + ca) &= 9 \\ \therefore ab + bc + ca &= 0 \cdots \textcircled{4} \\ \textcircled{3} \text{식에서} \\ a^3 + b^3 + c^3 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ 24 &= 3 \cdot (9 - 0) + 3abc \\ \therefore abc &= -1 \cdots \textcircled{5} \\ a^4 + b^4 + c^4 + 1 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 1 \\ &= 81 - 2 \cdot 6 + 1 = 70 \\ (\because a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) \\ &= 0 - 2 \times (-1) \times 3 \\ &= 6) \end{aligned}$$

24. x^4 을 $x + \frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫을 $q(x)$, 나머지를 r_1 이라 하고, $q(x)$

를 $x + \frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 나머지를 r_2 라 할 때, r_2 의 값은?

- ① $-\frac{1}{8}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

해설

$$x^4 = \left(x + \frac{1}{2}\right)q(x) + r_1 \text{에서 } x = -\frac{1}{2} \text{을 대입하면}$$

$$r_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{2}\right)q(x) = x^4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\text{이때, } a = -\frac{1}{2} \text{로 놓으면 } (x-a)q(x) = x^4 - a^4$$

$$\therefore q(x) = (x^4 - a^4) \div (x-a)$$

$$= (x+a)(x^2+a^2)$$

따라서, $q(x)$ 를 $x-a$ 로 나눈 나머지 r_2 는

$$q(a) = 4a^3$$

$$\therefore q\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= -\frac{1}{2}$$

25. x 에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 를 두 근으로 하는 이차방정식은 $ax^2-bx+c=0$ 이 된다. 이 때, $\alpha^3+\beta^3$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$ax^2+bx+c=0$ 두 근이 α, β 이므로,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$ax^2-bx+c=0$ 의 두 근이 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 이므로

$$\begin{cases} \text{두근의 합} : -\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{-b+c}{a}=\frac{b}{a} \\ \text{두근의 곱} : -\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}=\frac{c}{a} \end{cases}$$

$$2b=c, a=-b, c=-2a$$

$$\alpha+\beta=-\frac{(-a)}{a}=1, \alpha\beta=\frac{-2a}{a}=-2$$

$$\begin{aligned} \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= 1^3-3\cdot(-2)\cdot 1=1+6=7 \end{aligned}$$