

1. 다항식 $f(x)$ 에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ 일 때, $f(x)$ 를 $(2x-1)(3x-1)$ 로 나눈 나머지를 구하시오.

▶ 답:

▶ 정답: $12x - 3$

해설

구하는 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$f(x) = (2x-1)(3x-1)Q(x) + ax + b$$

$x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$ 을 각각 양변에 대입하면

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a + b = 3, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}a + b = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $\frac{1}{6}a = 2 \Rightarrow a = 12, b = -3$

\therefore 구하는 나머지는 $12x - 3$

2. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 3이고, $x+1$ 로 나눈 나머지가 -1 일 때, $(x^2+x+2)f(x)$ 를 x^2-1 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(1)$ 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

나머지 정리에 의해 $f(1) = 3, f(-1) = -1$

$$(x^2+x+2)f(x) = (x^2-1)Q(x) + ax + b$$

$x=1, x=-1$ 을 대입한다.

$$4f(1) = 12 = a + b \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2f(-1) = -2 = -a + b \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면,

$$a = 7, b = 5$$

$$\therefore \text{나머지 } R(x) = 7x + 5$$

$$R(1) = 12$$

3. 다항식 $f(x)$ 를 $x-3, x-4$ 로 나누는 나머지가 각각 3, 2이고, 다항식 $f(x+1)$ 을 x^2-5x+6 으로 나누는 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(1)$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f(3) = 3, f(4) = 2$$

$R(x) = ax + b$ 라 하면

$$f(x+1) = (x-2)(x-3)Q(x) + ax + b$$

$x = 2$ 대입,

$$f(3) = 2a + b = 3$$

$x = 3$ 대입,

$$f(4) = 3a + b = 2$$

$$a = -1, b = 5$$

$$R(x) = -x + 5,$$

$$R(1) = -1 + 5 = 4$$

4. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때의 나머지가 3이고, $x^2 - 4x + 3$ 으로 나눌 때의 나머지가 $3x$ 일 때, $f(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눌 때의 나머지는?

① 3

② $3x + 3$

③ $3x - 3$

④ $6x - 9$

⑤ $9x + 6$

해설

$$f(x) = (x-2)(x-1)Q(x) + 3$$

$$f(x) = (x-3)(x-1)Q'(x) + 3x$$

$\therefore f(2) = 3, f(3) = 9$ $f(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눌 때의 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$f(x) = (x-2)(x-3)Q''(x) + ax + b$$

$$f(2) = 2a + b = 3, f(3) = 3a + b = 9$$

$$a = 6, b = -9$$

\therefore 나머지는 $6x - 9$

5. $x^{113} + 1$ 을 $x^3 + x$ 로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라고 하자. 이때, $R(2006)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2007

해설

$$\begin{aligned}x^{113} + 1 &= (x^3 + x)Q(x) + R(x) \\ &= x(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c\end{aligned}$$

항등식이므로 $x = 0, x^2 = -1$ 을 각각 대입하면,

$$1 = c, \quad x + 1 = -a + bx + c$$

$$\therefore a = 0, \quad b = 1$$

$$\therefore R(x) = x + 1$$

$$\text{따라서 } R(2006) = 2007$$

6. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $(x-a)(x+b)$, $(x+b)(x-c)$, $(x-c)(x-a)$ 로 나눈 나머지가 각각 $x+2$, $-x+4$, 0 일 때, 상수 a, b, c 의 곱을 구하면?

① 8

② -8

③ 12

④ -12

⑤ 16

해설

$$f(x) = (x-a)(x+b)P(x) + x+2 \cdots \textcircled{1}$$

$$= (x+b)(x-c)Q(x) - x+4 \cdots \textcircled{2}$$

$$= (x-c)(x-a)R(x) \cdots \textcircled{3}$$

나머지 정리에 의해

i) ① 에서 $f(a) = a+2$, ③ 에서

$$f(a) = 0$$

$$\Rightarrow a = -2$$

ii) ① 에서 $f(-b) = -b+2$, ② 에서

$$f(-b) = b+4$$

$$\Rightarrow b = -1$$

iii) ② 에서 $f(c) = -c+4$, ③ 에서

$$f(c) = 0$$

$$\Rightarrow c = 4$$

$$\therefore abc = 8$$

7. $x - 1$ 로 나누면 나머지가 3, $x - 2$ 로 나누면 나머지가 7, $x - 3$ 으로 나누면 나머지가 13이 되는 가장 낮은 차수의 다항식을 $f(x)$ 라 할 때, $f(-3)$ 의 값은?

① 7

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

$$f(x) = k(x-1)(x-2)(x-3) + ax^2 + bx + c$$

$$f(1) = a + b + c = 3 \quad \dots\dots ①$$

$$f(2) = 4a + 2b + c = 7 \quad \dots\dots ②$$

$$f(3) = 9a + 3b + c = 13 \quad \dots\dots ③$$

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 1, c = 1$$

$f(x)$ 가 가장 낮은 차수가 되려면 $k = 0$

$$\therefore f(x) = x^2 + x + 1,$$

$$f(-3) = (-3)^2 + (-3) + 1 = 7$$

8. $x-1$ 로 나누면 나머지가 1이고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 -1 인 다항식 $f(x)$ 가 있다. $f(x)$ 를 x^2-1 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하자. $f(0) = 0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $Q(0) = 0$ 이다.

㉡ $f(x)$ 는 이차식이 될 수 없다.

㉢ $f(x)$ 가 삼차식이면 $f(x) = x^3$ 이다

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$f(x) = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$$

$$f(1) = a + b = 1, \quad f(-1) = -a + b = -1$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 0$$

$$\therefore f(x) = (x^2 - 1)Q(x) + x$$

$$\text{㉠ } f(0) = -Q(0) = 0 \quad \therefore \text{참}$$

㉡ $f(x)$ 가 이차식이기 위해서는 $Q(x)$ 가 0이 아닌 상수이어야 하는데 $Q(0) = 0$ 이므로 그런 경우는 없다. \therefore 참

$$\text{㉢ } Q(0) = 0 \text{이므로 } Q(x) = ax \quad (a \neq 0)$$

$$\therefore f(x) = ax(x^2 - 1) + x \quad (a \neq 0) \quad \therefore \text{거짓}$$

9. $P(x) = x^2 + x + 1$ 에 대하여 $P(x^6)$ 을 $P(x)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x - 4$

② $4x - 1$

③ 5

④ 4

⑤ 3

해설

$$P(x^6) = x^{12} + x^6 + 1$$

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 해를 w 라 하자.

$w^2 + w + 1 = 0$, 양변에 $(w - 1)$ 을 곱하면

$$w^3 - 1 = 0, w^3 = 1$$

$$x^{12} + x^6 + 1 = (x^2 + x + 1)Q(x) + ax + b$$
 에

w 를 대입하면,

$$(w^3)^4 + (w^3)^2 + 1 = (w^2 + w + 1)Q(w) + aw + b$$

$$3 = aw + b$$

w 는 허수, a, b 는 실수 이므로, $a = 0, b = 3$

\therefore 나머지 = 3

10. $P(x) = \frac{1}{2}(x-1)$ 일 때 $\{P(x)\}^{2007}$ 을 $P(x^2)$ 으로 나눈 나머지는?

① $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

② $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

③ $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

④ $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

⑤ $x - 1$

해설

$$P(x^2) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) = \frac{1}{2}(x-1)(x+1)$$

$P(x^2)$ 이 이차식이므로 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x) = ax + b$ 라 하면

$$\{P(x)\}^{2007} = \frac{1}{2}(x-1)(x+1)Q(x) + ax + b \cdots \text{㉠}$$

$$P(x) = \frac{1}{2}(x-1) \text{에서 } P(1) = 0, P(-1) = -1$$

㉠에 $x = 1$ 을 대입하면 $a + b = 0$

㉠에 $x = -1$ 을 대입하면 $-a + b = -1$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore R(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$