1. 세 수 $A = 3\sqrt{3}-1$, $B = \sqrt{3}+2$, $C = 2\sqrt{3}+1$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C < B < A$　② $A < B < C$　③ $A < C < B$

④ $B < A < C$　⑤ $B < C < A$

해설

i) $A - B = (3\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}+2)$
$= 2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{12} - \sqrt{9} > 0$
$\therefore A > B$

ii) $B - C = (\sqrt{3}+2) - (2\sqrt{3}+1)$
$= 1 - \sqrt{3} < 0$
$\therefore B < C$

iii) $C - A = (2\sqrt{3}+1) - (3\sqrt{3}-1)$
$= 2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} > 0$
$\therefore C > A$

따라서 $B < A < C$

2. $a>0,\ b>0$ 일 때, 다음 식 $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right) &= ab+9+1+\frac{9}{ab}\\ &= 10+ab+\frac{9}{ab}\\ &\geq 10+2\sqrt{ab\times\frac{9}{ab}}\\ &= 10+6=16\end{aligned}$$

따라서 최솟값은 16

3. 자연수 n 에 대하여 2^{4n}, 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$

④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$

4. $x > 3$일 때 $\dfrac{3}{x-3} + 2 + 3x$의 최솟값은?

① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

이 때, $x > 3$이므로 $3(x-3) > 0$, $\dfrac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$$3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$
$$\geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11$$
$$= 2 \cdot 3 + 11 = 17$$

(단, 등호는 $3(x-3) = \dfrac{3}{x-3}$, 즉 $x = 4$일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

5. a, b, x y가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$일 때 $ax + by$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 16

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
$8 \times 2 \geq (ax + by)^2$
$\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$
(최댓값) $\times$(최솟값)$= -16$

6. $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$$(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right) = 16+1+\frac{8b}{a}+\frac{2a}{b}$$

$a > 0,\ b > 0$ 이므로 $\frac{8b}{a}+\frac{2a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{8b}{a}\cdot\frac{2a}{b}} = 8$

$\therefore$ 최솟값은 $17+8=25$

7. $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $(a-b)\left(\frac{1}{a}-\frac{4}{b}\right)$ 의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(a-b)\left(\frac{1}{a}-\frac{4}{b}\right)$

$= 5-\left(\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\right) \leq 5-2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{4a}{b}} = 1$

8. 양의 실수 x, y에 대하여 $2x+y=1$일 때, $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}$의 최솟값을 구하면?

① $2\sqrt{6}$ ② $3\sqrt{6}$ ③ $4\sqrt{6}$ ④ $5\sqrt{6}$ ⑤ $6\sqrt{6}$

해설

$x>0, y>0$이므로 $2x+y=1 \geq 2\sqrt{2xy}$

$\frac{1}{2} \geq \sqrt{2xy}$

$\therefore \frac{1}{8} \geq xy$

$\frac{1}{x}+\frac{3}{y} \geq 2\sqrt{\frac{3}{xy}}$ 이므로

$\frac{3}{xy}$이 최소가 되려면 xy가 최대가 되어야 하므로 $xy=\frac{1}{8}$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{3}{y} \geq 2\sqrt{24}=4\sqrt{6}$

9. 양수 x, y에 대하여 $\left(x+\frac{3}{y}\right)\left(3y+\frac{1}{x}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x>0$, $y>0$이므로 산술기하평균의 관계에 의해

$$(\text{준식}) = 3xy+1+9+\frac{3}{xy} \geq 2\cdot\sqrt{3xy\cdot\frac{3}{xy}}+10$$
$$= 2\cdot 3+10=16$$

10. $a>0,\ b>0,\ c>0$일 때

$\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{c}{b}\right)\left(1+\dfrac{a}{c}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로

$$\frac{b}{a}>0,\ \frac{c}{b}>0,\ \frac{a}{c}>0$$

$$1+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{1\times\frac{b}{a}}=2\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$1+\frac{c}{b}\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}},\ 1+\frac{a}{c}\geq 2\sqrt{\frac{a}{c}}$$

$$\therefore \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)$$

$$\geq 8\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{c}{b}}\sqrt{\frac{a}{c}}=8$$

$$\therefore\ \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\geq 8$$

따라서 최솟값은 8