1. 220 의 소인수의 합을 구하면?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 18 ⑤ 32

해설

220 을 소인수분해하면 $220 = 2^2 \times 5 \times 11$

소인수는 2, 5, 11 이다.

$2 + 5 + 11 = 18$

2. 두 수 $2^2 \times 3$, $2^3 \times 7$ 의 최소공배수는?

① $2^2 \times 7$ ② $2^3 \times 3$ ③ $2 \times 3 \times 7$

④ $2^2 \times 3 \times 7$ ⑤ $2^3 \times 3 \times 7$

해설

$2^2 \times 3$, $2^3 \times 7$

최소공배수는 $2^3 \times 3 \times 7$ 이다.

3. 어떤 두 자연수의 최소공배수가 18 일 때, 100 이하의 두 자연수의 공배수 중 가장 큰 것은?

① 18 ② 36 ③ 54 ④ 72 ⑤ 90

해설

두 자연수의 공배수는 최소공배수의 배수를 구하면 된다.
어떤 두 자연수의 최소공배수가 18 이므로 A, B 의 공배수는 18, 36, 54, 72, 90 $\cdots$ 이다.
100 이하의 자연수 중 가장 큰 수는 90 이다.

4. 서로 맞물려 도는 두 톱니바퀴 A, B 가 있다. A 의 톱니의 수가 36, B 의 톱니의 수가 48 이다. 이 두 톱니바퀴가 처음과 같은 톱니에서 다시 물릴 때에는 B 는 적어도 몇 회전한 후인지 구하여라.

▶ 답 : 회전

▷ 정답 : 3회전

해설

$36 = 2^2 \times 3^2$, $48 = 2^4 \times 3$ 의 최소공배수는
$2^4 \times 3^2 = 144$ 이다.

$\therefore$ B 의 회전수는 $\frac{144}{48} = 3$ (회전)

5. 가로의 길이가 16cm , 세로의 길이가 12cm , 높이가 24cm 인 직육면체 모양의 벽돌이 있다. 이것을 같은 방향으로 놓이도록 쌓아서 정육면체를 만들 때, 이러한 정육면체 중 가장 작은 것의 한 모서리의 길이는?

① 36cm ② 48cm ③ 72cm

④ 96cm ⑤ 144cm

해설

가장 작은 정육면체의 한 모서리의 길이는 16, 12, 24 의 최소공배수이므로 48cm 이다.

6. 다음 중 거듭제곱의 표현으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

② $5 \times 5 \times 5 = 5^3$

③ $3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 = 3^2 \times 5^2 \times 7$

④ $3 + 3 + 3 + 3 = 3^4$

⑤ $\dfrac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3} = \dfrac{2^3}{3^3}$

해설

④ $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3$

7. $\dfrac{252}{A} = B^2$ 을 만족하는 자연수 A, B 에 대하여 B 의 최댓값은?

① 2 ② 3 ③ 6 ④ 8 ⑤ 14

해설

252 를 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 252 \\ \hline 2 & 126 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ 이므로 $\dfrac{2^2 \times 3^2 \times 7}{A} = B^2$ 을 만족하는 B 의 값 중에서 가장 큰 자연수는 $A = 7$ 일 때 $2 \times 3 = 6$ 이다.

8. 다음 중 두 수 $2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$, $2 \times 3^2 \times 5 \times 11$ 의 최대공약수를 구하면?

① $2 \times 3 \times 5$
② $2^2 \times 3^2 \times 5^2$
③ $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$
④ $2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11$
⑤ $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11$

해설

공통인 소인수 중 지수가 낮은 쪽을 택하여 곱하면 되므로 $2 \times 3 \times 5$ 이다.

9. 다음 두 수 $2^a \times 3^3 \times 5^2$, $2^2 \times 3^2 \times 5^{a+1}$ 의 최소공배수가 $2^2 \times 3^3 \times 5^{a+1}$ 일 때, 자연수 a 를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

해설

2^a 와 2^2 의 최소공배수가 2^2 이므로 a 는 2 이하의 수가 되어야 한다.
또한 5^2 과 5^{a+1} 의 최소공배수가 5^{a+1} 이므로 $a+1$ 은 2 이상의 수가 되어, a 는 1 이상의 수가 되어야 한다.
따라서 두 조건을 모두 만족시키는 자연수는 1 과 2 이다.

10. 달리기 대회에서 기념품으로 수건 120 개, 스카프 144 개, 모자 156 개를 되도록 많은 참가자들에게 똑같이 나누어주려고 한다. 이 때, 한 명이 받게 되는 수건과 스카프, 모자의 개수로 옳은 것은?

① 5 개, 6 개, 9 개
② 6 개, 12 개, 18 개
③ 18 개, 12 개, 10 개
④ 12 개, 12 개, 12 개
⑤ 10 개, 12 개, 13 개

해설

참가자들의 수는
120, 144, 156 의 최대공약수이므로 12
한 명이 받게 되는 수건, 스카프, 모자의 수는 각각
$120 \div 12 = 10$, $144 \div 12 = 12$, $156 \div 12 = 13$

11. 가로, 세로의 길이가 각각 60 cm , 84 cm 인 직사각형 모양의 옷감을 똑같은 크기의 정사각형으로 자르려고 한다. 가능한 한 큰 정사각형으로 자르려 한다면 처음의 옷감은 몇 개로 나누어지겠는가?

① 21 개 ② 24 개 ③ 30 개 ④ 35 개 ⑤ 38 개

해설

가장 큰 정사각형의 한 변의 길이는 60 , 84 의 최대공약수이다.
$60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ 의 최대공약수는 $2^2 \times 3 = 12$
따라서 나누어지는 개수는 $(60 \div 12) \times (84 \div 12) = 35$(개) 이다.

12. 어떤 자연수로 93 을 나누면 3 이 남고, 49 를 나누면 4 가 남고, 76 을 나누면 1 이 남는다고 한다. 이러한 자연수 중에서 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

구하는 가장 큰 자연수는 90, 45, 75 의 최대공약수,

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$, $45 = 3^2 \times 5$, $75 = 3 \times 5^2$

$\therefore\ 3 \times 5 = 15$

13. 자연수 N 과 24 의 최대공약수는 6 이고 최소공배수는 120 일 때, 자연수 N 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

N 과 24 의 최대공약수가 6 이므로

$N = 6n$ 이라 하면

$$\begin{array}{r|rr} 6 & 6n & 24 \\ \hline & n & 4 \end{array}$$

$6 \times n \times 4 = 120,\ n = 5$

$\therefore\ N = 6 \times 5 = 30$

14. 100 부터 300 까지의 자연수 중에서 3, 4 중 어떤수로도 나누어 떨어지지 않는 수의 갯수는 모두 몇 개인가?

① 67 ② 99 ③ 100 ④ 101 ⑤ 200

해설

3 의 배수의 갯수는 $100 - 33 = 67$,
4 의 배수의 갯수는 $75 - 24 = 51$,
12 의 배수의 갯수는 $25 - 8 = 17$
따라서 3, 4 중 어떤 수로도 나누어 떨어지지 않는 수의 갯수는
$201 - (67 + 51 - 17) = 100$

15. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① 1은 소수이다.

② 29는 소수가 아니다.

③ 37과 43은 모두 소수이다.

④ 소수이면서 합성수인 자연수는 존재하지 않는다.

⑤ 자연수는 소수와 합성수로 이루어져 있다.

해설

① 1 은 소수가 아니다.
② 29 는 소수이다.
⑤ 1 은 소수도 합성수도 아니다.

16. 196 을 $a^m \times b^n$ 으로 소인수분해하였을 때, $a+b+m+n$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$196 = 2^2 \times 7^2$

따라서 $a = 2,\ b = 7, m = 2, m = 2$

$a+b+m+n = 13$

17. 두 수 $2^3 \times 3 \times 7^2 \times 11$, 60 의 공약수들의 합은?

① 28 ② 35 ③ 48 ④ 51 ⑤ 64

해설

$2^3 \times 3 \times 7^2 \times 11$ 과 $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 의 최대공약수는 $2^2 \times 3$
따라서 두 수의 공약수는 $2^2 \times 3$ 의 약수이다.
주어진 두 수의 공약수의 합은 $1+2+3+2^2+2\times3+2^2\times3 = 28$

18. 두 자연수 $2^2 \times 5^2 \times 15$, $2^2 \times 5^{\square} \times 14$ 의 공약수의 개수가 12 개일 때 $\square$ 안에 들어가기에 적당하지 않은 수는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$2^2 \times 5^3 \times 3$, $2^3 \times 5^{\square} \times 7$ 공약수의 개수가 12 개이므로 $2^2 \times 5^x$ 에서 $3 \times (x+1) = 12 \quad \therefore \ x = 3$ 따라서, 최대공약수는 $2^2 \times 5^3$

$\therefore \ \square \geq 3$

19. 400 이하의 어떤 자연수를 3, 4, 7 로 나누었을 때 그 나머지가 각각 2, 3, 6 이 되는 수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

3, 4, 7 로 나누었을 때 그 나머지가 2, 3, 6 이 되는 수는 (3, 4, 7로 나누어 떨어지는 수) − 1 이다.
3, 4, 7 의 최소공배수는 84 이다.
400 이하의 자연수 중 $84-1=83$, $84\times2-1=167$, $84\times3-1=251$, $84\times4-1=335$ 까지 4 개이다.

20. 두 자연수 A, B 에서 $A \times B$ 의 값이 1440 이고, 최대공약수가 12 일 때, 차가 가장 작은 두 자연수의 합은?

① 11 ② 36 ③ 72 ④ 84 ⑤ 108

해설

최소공배수를 L 이라 하면 $1440 = 12 \times L$ 이므로 $L = 120$

$$\begin{array}{r|ll} 12 & A & B \\ \hline & a & b \end{array}$$

$12 \times a \times b = 120$

$a \times b = 10$ (단, a, b 는 서로소)

$A = 12 \times a$, $B = 12 \times b$ 이고 $A > B$ 라 하면

$a = 10$, $b = 1$ 또는 $a = 5$, $b = 2$

(i) $a = 10$, $b = 1$ 일 때

$A - B = 10 \times 12 - 1 \times 12 = 108$

(ii) $a = 5$, $b = 2$ 일 때

$A - B = 5 \times 12 - 2 \times 12 = 36$

따라서, 차가 가장 작은 두 자연수는 60, 24 이다.

21. 자연수 x 에 대하여 $f(x)$ 는 x 를 8 로 나눈 나머지, $g(x)$ 는 x 를 9 로 나눈 나머지라고 정의할 때, $\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)\}+\{g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(n)\}=671$ 을 만족하는 n 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 82

해설

$f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=3,\ f(4)=4,\ f(5)=5,\ f(6)=6,\ f(7)=7,\ f(8)=0,\ f(9)=1,\ \cdots$

→ 연속되는 8 개의 수의 나머지의 합은 28 이다.

→ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)=28\times12+1+2+3+4=346$

,

$g(1)=1,\ g(2)=2,\ g(3)=3,\ g(4)=4,\ g(5)=5,\ g(6)=6,\ g(7)=7,\ g(8)=8,\ g(9)=0,\ g(10)=1,\ \cdots$

→ 연속되는 9 개의 수의 합은 36 이다.

→ $\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)\}+\{g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(n)\}=671$

→ $346+g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(n)=671$

→ $g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(n)=325=36\times9+1$

→ 연속되는 9 개의 수가 9 쌍 있고 뒤에 1 개의 수가 더 있다.

$\therefore n=9\times9+1=82$

22. 400 보다 작은 자연수에 대하여, 5 의 배수이지만 2, 3, 4 의 배수는 아닌 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

5 의 배수이지만 2, 3, 4 의 배수는 아닌 수는 5 의 배수이면서 2, 3 의 배수가 아닌 수이다.

$\therefore\ 80 - 40 - 26 + 13 = 27$

23. $5^x = 125$ 를 만족하는 x 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$125 = 5^3$ 이다. 따라서 $x = 3$ 이다.

24. 자연수 n 에 대해 $S(n)$ 은 n 의 약수의 개수이다. 자연수 a, b 가 서로소일 때, $S(a)+S(b)=6$ 을 만족하는 $S(a\times b)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$S(a)+S(b)=6$ 이므로,
$(S(a),S(b))=(2,4),\ (3,3),\ (4,2)$ 이다.
(1) $(S(a),S(b))=(2,4)$ 일 때, $a=x$, $b=y^3$ 이거나 $b=y\times z$ 의 형태이므로,
$S(a\times b)=8$ 이다.($(S(a),S(b))=(4,2)$ 일 때도 같다.)
(2) $(S(a),S(b))=(3,3)$ 일 때, $a=x^2$, $b=y^2$ 의 형태이므로,
$S(a\times b)=9$ 이다.
$\therefore S(a\times b)$ 의 최솟값$=8$

25. 서로 다른 한 자리 소수 a, b, c 에 대하여 $a^l \times b^m \times c^n$ 으로 소인수분해되는 자연수 N 에 3 을 곱하였더니 약수의 개수가 2 배가 되었다. 이때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

a, b, c 중 3이 있는 경우

$a = 3$ 이라 하면

$2(l+1)(m+1)(n+1) = (l+2)(m+1)(n+1)$

$2l+2 = l+2$, $l = 0$

l, m, n 은 1 이상인 자연수이므로 a, b, c 중에 3은 없다.

a, b, c 는 한 자리 소수 2, 3, 5, 7 중에서 3이 아니므로 2, 5, 7 이다.

$\therefore\ 2+5+7 = 14$