1. $a < b$일 때, □안의 등호가 알맞은 것을 모두 고르면?

㉠ $a+2 \boxed{<} b+2$	㉡ $-a-4 \boxed{>} -b-4$
㉢ $\frac{1}{2}a+3 \boxed{>} \frac{1}{2}b+3$	㉣ $-\frac{a}{3} \boxed{<} -\frac{b}{3}$

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉡, ㉣
④ ㉠, ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉢ 부등식의 양변에 양수를 곱하거나 같은 수를 더하더라도 부등호의 방향이 바뀌지 않으므로 $\frac{1}{2}a+3 < \frac{1}{2}b+3$

㉣ 부등식의 양변을 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀌므로 $-\frac{a}{3} > -\frac{b}{3}$

2. $-1 < x \leqq 2$, $1 < y \leqq 3$일 때, $a < x - y < b$를 계산하여 $b - a$의 값을 구하면?

① -14 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ -5

해설

$-1 < x \leq 2$, $1 < y \leq 3$에서
$x - y$의 가장 작은 값은 $-1 - 3 = -4$
가장 큰 값은 $2 - 1 = 1$
$\therefore -4 < x - y < 1$이므로 $a = -4$, $b = 1$
$b - a = 1 + 4 = 5$

3. 부등식 $3x+2 \geq 8$을 풀면?

① $x \geq -2$ ② $x \geq -1$ ③ $x \geq -\frac{1}{2}$
④ $x \geq \frac{3}{2}$ ⑤ $x \geq 2$

해설
$3x+2 \geq 8,\ 3x \geq 6\ \therefore x \geq 2$

4. 부등식 $ax+1 \geq 2x+5$의 해가 $x \geq 2$일 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 4 ⑤ 7

해설

$ax+1 \geq 2x+5$에서 $(a-2)x \geq 4$의 부등식의 해가 $x \geq 2$이므로

$a-2>0$

$x \geq \dfrac{4}{a-2}$이므로 $\dfrac{4}{a-2}=2,\ a-2=2$

$\therefore a=4$

5. 연립부등식 $\begin{cases} 4x+1 \geq x+4 \\ 2x-2>8 \end{cases}$ 의 해를 구하면?

① $x>1$ ② $x \geq 1$ ③ $x<1$ ④ $x>5$ ⑤ $x \leq 5$

해설

$4x+1 \geq x+4$

$3x \geq 3$, $x \geq 1$

$2x-2>8$

$2x>10$, $x>5$

$\therefore x>5$

6. 부등식 $4-x \le 3x-4 < 2x+2$ 를 풀면?

① $x \le 2$ ② $x \ge 2$ ③ $2 \le x < 6$
④ $x \le 6$ ⑤ $x \ge 6$

해설

$4-x \le 3x-4 < 2x+2$

$\Rightarrow \begin{cases} 4-x \le 3x-4 \\ 3x-4 < 2x+2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -x-3x \le -4-4 \\ 3x-2x < 2+4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -4x \le -8 \\ x < 6 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x < 6 \end{cases}$

$\therefore\ 2 \le x < 6$

7. 다음 연립부등식을 만족하는 정수의 개수가 10 개일 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 7x + 4 > 5x \\ 15 - x > a \end{cases}$$

① 3, 4 ② 5, 6 ③ 6 ④ 6, 7 ⑤ 4, 5, 6

해설

$7x + 4 > 5x$
$\therefore\ x > -2$
$15 - x > a$
$\therefore\ x < 15 - a$
만족하는 정수는 10 개이므로 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 이다.
$8 < 15 - a \le 9$
$6 \le a < 7$
$\therefore\ a = 6$

8. 부등식 $|x-2|+|x+3| \geq -2x+9$의 해는?

① $x \geq 2$　　② $-3 \leq x \leq 2$　　③ $1 < x \leq 2$
④ $x < 2$　　⑤ 해가 없다.

해설

(i) $x < -3$일 때,
$-2x-1 \geq -2x+9$, $-1 \geq 9$
따라서 이 범위에서 해가 존재하지 않는다.
(ii) $-3 \leq x < 2$일 때,
$5 \geq -2x+9$
$2x \geq 4$, $x \geq 2$ 따라서 이 범위에서 해가 없다.
(iii) $x \geq 2$일 때,
$2x+1 \geq -2x+9$
$4x \geq 8$, $x \geq 2$ 따라서 이 범위에서의 해는 $x \geq 2$이다.
세 범위의 해를 연립하면 결과는
$\therefore x \geq 2$

9. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 6x + 9 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 \le 0 \end{cases}$ 의 해를 바르게 구한 것을 고르면?

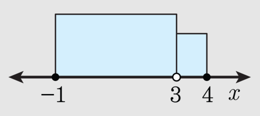
① $-1 \le x < 4$　　② $3 < x \le 4$

③ $-1 \le x < 3$　　④ $-1 \le x < 3$ 또는 $3 < x \le 4$

⑤ 해가 없다

해설

$\begin{cases} (x-3)^2 > 0 & : \ x \ne 3 \text{인 모든 실수} \\ (x-4)(x+1) \le 0 & : \ -1 \le x \le 4 \end{cases}$



$\therefore$ $-1 \le x < 3$ 또는 $3 < x \le 4$

10. 연립부등식 $\begin{cases} 2x - 11 < 5x + 7 \\ 3(x-1) \le 4(2-x) + 2 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 값 중 가장 큰 정수를 A , 가장 작은 정수를 B 라 할 때, $A + B$ 의 값을 구하면?

① -5　② -4　③ -2　④ 0　⑤ 2

해설

ⅰ) $2x - 11 < 5x + 7$

$\Rightarrow\ x > -6$

ⅱ) $3(x-1) \le 4(2-x) + 2$

$\Rightarrow\ 3x - 3 \le 8 - 4x + 2$

$\Rightarrow\ 3x + 4x \le 10 + 3$

$\Rightarrow\ x \le \frac{13}{7}$

$-6 < x \le \frac{13}{7}$ 이므로

$A = 1,\ B = -5$

$\therefore A + B = 1 + (-5) = -4$

11. x가 자연수일 때, $0.6(2-x) \geq 0.5x-1.1$를 만족하는 x의 개수를 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$6(2-x) \geq 5x-11$
$12-6x \geq 5x-11$
$-11x \geq -23$
$\therefore\ x \leq \dfrac{23}{11}$
따라서 1, 2이다.

12. 연립부등식 $\begin{cases} -x+a>5 \\ 3-2x\le 1 \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a>3$ ② $a<3$ ③ $a>6$ ④ $a<6$ ⑤ $a\le 6$

해설

$\begin{cases} -x+a>5 & \rightarrow & a-5>x \\ 3-2x\le 1 & \rightarrow & 1\le x \end{cases}$

해가 없으려면 $a-5\le 1$

$\therefore a\le 6$

13. 부등식 $|2x-a|>7$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\frac{a-7}{2}$ 또는 $x>\frac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\frac{a-7}{2}=-1$, $\frac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5$, $b=6$

$\therefore a+b=11$

14. 부등식 $-x^2 - kx + k < 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 k의 범위를 정하면 $a < k < \beta$이다. 이 때, $\alpha + \beta$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x^2 + kx - k > 0$이 모든 x에 대해서 성립하려면,
판별식이 0보다 작아야 한다
$D = k^2 + 4k < 0$에서
$k(k+4) < 0,\ -4 < k < 0,$
$\alpha = -4,\ \ \beta = 0$
$\therefore\ \ \alpha + \beta = -4$

15. 부등식 $ax^2+(a+1)x+a \geq 0$을 만족하는 실수 x가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a>1$ ② $a<-\frac{1}{3}$ ③ $a \geq -\frac{1}{3}$

④ $a \leq -\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{3}<a<1$

해설

$ax^2+(a+1)x+a \geq 0$을 만족하는 실수가 존재하는 경우는
전체에서 모든 실수 x에 대하여
$ax^2+(a+1)x+a<0$인 경우를 제외하면 된다.
$ax^2+(a+1)x+a<0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면
$a<0 \cdots$ ㉠
또, 이차방정식 $ax^2+(a+1)x+a=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(a+10)^2-4a^2<0,\ -3a^2+2a+1<0$
$3a^2-2a-1>0,\ (3a+1)(a-1)>0$
$\therefore a<-\frac{1}{3}$ 또는 $a>1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a<-\frac{1}{3}$
따라서 $ax^2+(a+1)x+a \geq 0$을 만족하는 실수가 존재하려면
$a \geq -\frac{1}{3}$이면 된다.

16. 이차부등식 $x^2 + 2x + a < 0$의 해가 $-4 < x < 2$일 때, a의 값을 구하여라.(단, a는 상수)

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

해가 $-4 < x < 2$ 이므로
$(x+4)(x-2) < 0$
$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + a$
$\therefore a = -8$

17. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x^2 - 4x < 5 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-1 < x < 2$

해설

부등식 $x^2 - 4 < 0$에서 $(x+2)(x-2) < 0$

$\therefore -2 < x < 2 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2 - 4x < 5$에서 $x^2 - 4x - 5 < 0$

$(x+1)(x-5) < 0$

$\therefore -1 < x < 5 \cdots\cdots$ ㉡

따라서 구하는 해는 ㉠과 ㉡를

동시에 만족하는 x의 값이므로

$\therefore -1 < x < 2$

18. 실수 x에 대하여 $[x]$는 x를 넘지않는 최대 정수를 나타낸다고 한다. 부등식 $2[x]^2 - [x] - 6 < 0$를 만족하는 x의 범위를 바르게 구한 것은?

① $-1 \le x < 2$ ② $x \le -1$ ③ $x \ge 1$

④ $x \le 1$ ⑤ $x \le -1,\ x \ge 2$

해설

$2[x]^2 - [x] - 6 < 0$에서 좌변을 인수분해하면

$(2[x]+3)([x]-2) < 0,\ -\dfrac{3}{2} < [x] < 2$

이 때 $[x]$는 정수이므로 $[x] = -1,\ 0,\ 1$

$[x] = -1,\ 0,\ 1$이면 $-1 \le x < 2$

$\therefore\ -1 \le x < 2$

19. x에 관한 이차부등식 $x^2-(a-6)x+a-3\le 0$을 만족하는 실수 x가 존재할 때, 실수 a의 범위는?

① $4\le a\le 12$ ② $a\le 4,\ a\ge 12$ ③ $6\le a\le 8$
④ $a\le 6,\ a\ge 8$ ⑤ $4\le a\le 8$

해설

$x^2-(a-6)x+a-3\le 0$의 실수해가 존재하려면
$D=(a-6)^2-4(a-3)\ge 0$
$a^2-16a+48\ge 0,\ (a-4)(a-12)\ge 0$
$\therefore\ a\le 4,\ a\ge 12$

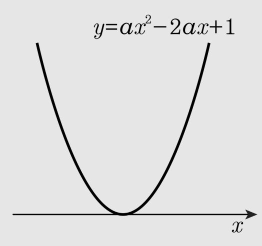
20. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \leq 0$이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면
$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$
(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$
(i), (ii) 에서 $a = 1$

21. 이차함수 $y = x^2 - 4ax + 1$ 의 그래프가 직선 $y = 2x - a$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있도록 하는 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a > 0$ ② $-\frac{1}{4} < a < 0$ ③ $-\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$
④ $-\frac{3}{4} < a < \frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{4} < a < 0$

해설

$$\begin{cases} y = x^2 - 4ax + 1 \\ y = 2x - a \end{cases}$$

근이 존재하지 않아야 하므로

$2x - a = x^2 - 4ax + 1$

$x^2 + (-4a - 2)x + (a + 1) = 0$

$D < 0 : \ (2a + 1)^2 - (a + 1) < 0$

$4a^2 + 3a = a(4a + 3) < 0$

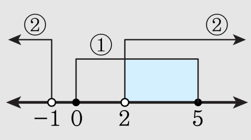
$\therefore \ -\frac{3}{4} < a < 0$

22. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \le 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \le 5$이 되도록 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설



첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x - 5) \le 0$

$\therefore 0 \le x \le 5 \cdots\cdots$ ①

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \cdots\cdots$ ②

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \le 5$ 이므로 a의 값은 2이다.

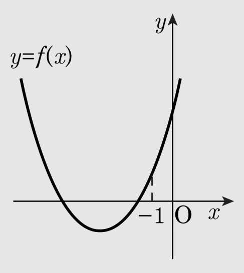
23. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 3개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서
$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$
$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$
(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\frac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$
이상에서 $-7<k<-3$
따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

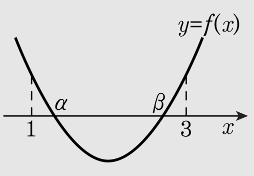
24. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면
$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$
$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$
$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \dfrac{13}{3}$
$\therefore\ a < \dfrac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
$x = \dfrac{a}{2}$ 이므로 $1 < \dfrac{a}{2} < 3$
$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \dfrac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4$, $\beta = \dfrac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

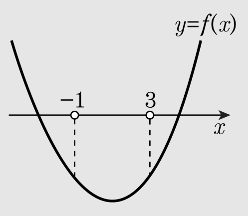
25. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k<0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0$, $f(3) \le 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \le 0$, $k+3 \le 0$
$\therefore k \le -3$

(ii) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \le 0$, $9k+3 \le 0$
$\therefore k \le -\frac{1}{3}$

(i), (ii) 에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.