1. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $i^4 = -1$

② $x^2 = -9$ 를 만족하는 실수는 존재하지 않는다.

③ $\sqrt{-27} = 3\sqrt{3}i$

④ $2 \in \{x \mid x$는 복소수$\}$

⑤ $a + bi$ 에서 $a = 0$ 이고 $b \neq 0$ 이면 순허수이다.(단, a, b 는 실수)

해설

$i^2 = -1 \quad \rightarrow \quad i^4 = 1$

2. 등식 $(1-2i)x+(2+i)y=4-3i$ 를 만족하는 실수 $x+y$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 8

해설

$(1-2i)x+(2+i)y=4+3i=0$ 에서
$(x+2y-4)+(-2x+y+3)i=0$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x+2y-4=0$, $-2x+y+3=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$x=2,\ y=1$
$\therefore\ x+y=3$

3. $\frac{3+4i}{1+3i}$ 를 $a+bi$ 의 꼴로 나타 낼 때, $a-b$ 의 값은? (단, a , b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 2 ② -2 ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

분모의 실수화를 해준다.

$\frac{3+4i}{1+3i}=\frac{(3+4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

$\therefore a-b=2$

4. $\alpha = 1 + i$, $\beta = 2 - i$ 의 켤레복소수를 각각 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 라 할 때, $\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}$ 의 값은?

① 0 ② 3 ③ $7-2i$ ④ $7-i$ ⑤ $7+i$

해설

$\alpha = 1 + i$, $\beta = 2 - i$ 에서 $\overline{\alpha} = 1 - i$, $\overline{\beta} = 2 + i$ 이므로

$\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}$

$= (1+i)(1-i) + (1+i)(2+i) + (1-i)(2-i) + (1-i)(2+i)$

$= (1+1) + (2-1+3i) + (2-1-3i) + (2+1-i)$

$= 7-i$

5. 방정식 $|x+5|=1$ 를 만족하는 x 의 값들의 합은?

① -9 ② -10 ③ -11 ④ -12 ⑤ -13

해설

$|x+5|=1$

$\Rightarrow\ x+5=1$ 또는 $x+5=-1$

$\therefore\ x=-4$ 또는 $x=-6$

6. x에 대한 이차방정식 $x^2 - 4x + 6 = 0$의 근을 구하면 $x = a \pm \sqrt{b}i$이다. $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2 - 4x + 6 = 0$

근의 공식을 이용하면 $x = 2 \pm \sqrt{4 - 6} = 2 \pm \sqrt{2}i$

$\therefore a = b = 2, \quad a + b = 4$

7. 이차방정식 $2x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$ 은?

① -9 ② -2 ③ 0 ④ 5 ⑤ 13

해설

$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-4=5$

8. 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2-6x+k$ 의 최솟값과 이차함수 $y=-3x^2+6x-3k+3$ 의 최댓값이 일치할 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{33}{4}$

해설

$y=\frac{1}{3}x^2-6x+k=\frac{1}{3}(x-9)^2-27+k$

최솟값은 $-27+k$

$y=-3x^2+6x-3k+3$

$=-3(x-1)^2+6-3k$

최댓값은 $6-3k$

$-27+k=6-3k$

$\therefore\ k=\frac{33}{4}$

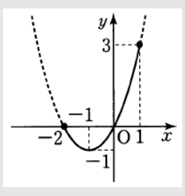
9. $-2 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, $-2 \le x \le 1$ 에서
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.
즉, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$
따라서, $x = 1$ 일 때 최댓값 3,
$x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로
구하는 합은 $3 - 1 = 2$



10. x에 대한 이차방정식$(m-1)x^2-2mx+(m+2)=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값과 그 때의 중근을 α라 할 때, $m+\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $m \neq 1$ 이고, x의 계수가 $2m$ 이므로

$\frac{D}{4}=m^2-(m-1)(m+2)=0$

정리하면, $-m+2=0 \quad \therefore\ m=2$

$m=2$ 를 준식에 대입하면

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$

$\therefore\ x=2$ (중근 α)

$\therefore m+\alpha=2+2=4$

11. x에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2+2kx+k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

(ⅰ) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $k-1\neq 0$이어야 한다.
따라서 $k\neq 1$

(ⅱ) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2-(k-1)^2>0,\ 2k-1>0$

$\therefore k>\frac{1}{2}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

12. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3 ② 0 ③ 2

④ 4 ⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$
근과 계수와의 관계에 의해
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입
$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$
계수가 유리수이므로
$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

13. $x=-1$ 일 때, 최댓값 3 을 갖고 한 점 $(1,\ -1)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y=-2(x+1)^2-4$
② $y=(x-2)^2-3$
③ $y=-2(x-1)^2+3$
④ $y=-(x+1)^2+3$
⑤ $y=-\frac{1}{2}x^2-1$

해설

꼭짓점이 $(-1,\ 3)$ 이므로 $y=a(x+1)^2+3$
$(1,\ -1)$ 을 대입하면 $-1=4a+3$
$a=-1$
$\therefore\ y=-(x+1)^2+3$

14. 사차방정식 $x^4+5x^3-20x-16=0$ 의 네 근의 제곱의 합을 구하면?

① 25 ② 20 ③ 10 ④ 7 ⑤ 4

해설

$x^4+5x^3-20x-16$

$=(x+1)(x^3+4x^2-4x-16)$

$=(x+1)(x+4)(x^2-4)$

$=(x+1)(x+4)(x+2)(x-2)$

따라서 네근은 $-1,\ -2,\ -4,\ 2$

$\therefore$ 네근의 제곱의 합은 $1+4+16+4=25$

15. $x^4-5x^2-14=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하면?

① 4　　② -4　　③ 8　　④ -8　　⑤ -16

해설

$x^4-5x^2-14=(x^2+2)(x^2-7)=0$이므로
두 허근 α, β는
각각 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$이므로
$\alpha^2+\beta^2=-2-2=-4$

16. 삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1-\sqrt{2}$, 2　② $-1+\sqrt{2}$, -3　③ $1-\sqrt{2}$, 3
④ $1-\sqrt{2}$, -3　⑤ $-1+\sqrt{2}$, 3

해설
한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})+\alpha=5,\ \ \alpha=3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1-\sqrt{2}$

17. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2+y^2=5$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

$\therefore\ xy=2$

18. 이차다항식 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 두근의 합이 12일 때, 이차방정식 $f(2x)=0$의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하고
$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$라 놓으면
$f(2x)=a(2x-\alpha)(2x-\beta)=0$
$a\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=0$, $\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=0$
$\alpha+\beta=12$ 이므로
이 방정식의 두 근 $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ 의 합은
$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{12}{2}=6$

19. 직선 $y = ax + 1$ 이 두 이차함수 $y = x^2 + x + 2$, $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프와 모두 만나지 않도록 상수 a 의 값의 범위를 정하면 $\alpha < a < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① -5 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선과 이차함수를 연립하여 판별식이
0 보다 작으면 직선과 이차함수가 만나지 않는다.

1) $ax + 1 = x^2 + x + 2$	2) $ax + 1 = -x^2 + 4x$
$\Rightarrow x^2 + (1 - a)x + 1 = 0$	$\Rightarrow x^2 + (a - 4)x + 1 = 0$
$D = (a - 1)^2 - 4 < 0$	$\Rightarrow D = (a - 4)^2 - 4 < 0$
$\Rightarrow -1 < a < 3$	$\Rightarrow 2 < a < 6$

$\therefore$ 1), 2) 의 공통 해 : $2 < a < 3$
$\therefore \alpha + \beta = 5$

20. $0 \le x \le 3$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 최댓값은? (단, $0 \le a \le 2$)

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ $(0 \le x \le 3)$

$0 \le \frac{a}{2} \le 1$ 이므로

최솟값 $m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4}$,

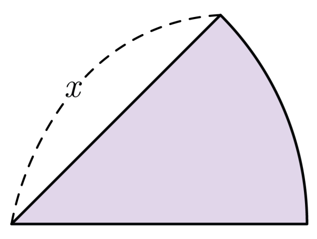
최댓값 $M = f(3) = 9 - 3a$

$\therefore M + m = 9 - 3a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a+6)^2 + 18$

이때, $0 \le a \le 2$ 이므로

$M + m$ 은 $a = 0$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

21. 둘레의 길이가 12 인 부채꼴에서 반지름의 길이를 x 라 하고, 부채꼴의 넓이를 y 라 할 때, 부채꼴의 넓이를 최대가 되게 할 때, 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

부채꼴의 넓이를 y, 반지름의 길이를 x 라 하면

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (12 - 2x) \\ &= x(6 - x) \\ &= -x^2 + 6x \\ &= -(x^2 - 6x + 9 - 9) \\ &= -(x - 3)^2 + 9 \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
따라서 꼭짓점이 $(3, 9)$ 이므로 반지름의 길이 $x = 3$ 일 때, 부채꼴의 넓이 y 가 최댓값 9를 가진다.

22. 지면으로부터 초속 30m 로 위로 던진 공의 t 초 후의 높이를 hm 라고 하면 $h = -5t^2 + 30t$ 인 관계가 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ________ m

▷ 정답 : 45 m

해설

$h = -5t^2 + 30t$ 에서 $h = -5(t-3)^2 + 45$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 45m 이다.

23. 사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+4x-5=0$의 두 근이 $1,\ -1$일 때, 나머지 두 근의 곱은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^4+ax^3+bx^2+4x-5$
$=(x-1)(x+1)(x^2+tx+s)$
$=(x^2-1)(x^2+tx+s)$
$\therefore t=a,\ s-1=b,\ -t=4,\ -s=-5$
$t=-4,\ s=5$이므로 $a=-4,\ b=4$이고,
나머지 두 근의 곱은 s이므로 5이다.

24. 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5$의 값은?
(단, $i=\sqrt{-1}$)

① 0　② 1　③ -1　④ i　⑤ -2

해설

한 근이 α이므로
$\alpha^2+\alpha+1=0$,
양변에 $\alpha-1$를 곱하면,
$\alpha^3-1=0$, $\therefore\ \alpha^3=1$
$\therefore\ \alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$
$=\alpha^3(\alpha^2+\alpha+1)+\alpha^2+\alpha+1$
$=0$

25. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ 5x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$ 의 근을 $x = \alpha$, $y = \beta$라 할 때, $\alpha + \beta$의 최댓값은?

① 4　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 10

해설

$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \cdots ① \\ 5x^2 - y^2 = 4 \quad\quad \cdots ② \end{cases}$

①식 인수분해 : $(2x - y)(x - y) = 0$

$\therefore\ y = 2x, y = x$

②식에 대입하면

$y = 2x \rightarrow 5x^2 - (2x)^2 = 4$,

$x^2 = 4$, $x = \pm 2, y = \pm 4$

$y = x \rightarrow 5x^2 - x^2 = 4$, $4x^2 = 4$

$x^2 = 1$, $x = \pm 1, y = \pm 1$

$x = \alpha, y = \beta$에서

$\alpha + \beta \ :\ 2 + 4 = 6, -2 - 4 = -6$

$1 + 1 = 2\ , -1 - 1 = -2$

$\therefore \alpha + \beta$의 최댓값은 6