1. 등식 $\frac{x}{1+2i}+\frac{y}{1-2i}=1-\frac{i}{5}$ 를 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $16xy$ 의 값은?

① 97 ② 98 ③ 99 ④ 100 ⑤ 101

해설

(좌변) $=\frac{x}{1+2i}+\frac{y}{1-2i}$

$=\frac{x(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\frac{y(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$\frac{(x+y)+2(y-x)i}{5}$ 이므로

$\frac{x+y}{5}+\frac{2(y-x)i}{5}=1-\frac{i}{5}$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\frac{x+y}{5}=1\ ,\ \frac{2(y-x)}{5}=-\frac{1}{5}$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=\frac{11}{4},\ y=\frac{9}{4}$

$\therefore\ 16xy=16\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{9}{4}=99$

2. 허수단위 i에 대하여 $i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$을 간단히하면?

① $1+i$　② $-1+i$　③ $2i$
④ $2+i$　⑤ 2

해설

$i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$
$=i+(-1)+(-i)+1+i+(-1)$
$=-1+i$

3. $a=2+\sqrt{3}i$, $b=2-\sqrt{3}i$ 일 때, $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{7}$

해설

$a=2+\sqrt{3}i$, $b=2-\sqrt{3}i$ 일 때

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{b^2+a^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}\cdots$㉠

이 때, $a+b=(2+\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)=4$

$ab=(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)$

$=2^2-(\sqrt{3}i)^2=4+3=7$ 이므로

$a+b=4$, $ab=7$ 을 ㉠에 대입하면

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}$

$=\frac{16-14}{7}=\frac{2}{7}$

4. $\alpha = 1+i$, $\beta = 2-i$ 의 켤레복소수를 각각 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 라 할 때, $\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}$ 의 값은?

① 0 ② 3 ③ $7-2i$ ④ $7-i$ ⑤ $7+i$

해설

$\alpha = 1+i$, $\beta = 2-i$ 에서 $\overline{\alpha} = 1-i$, $\overline{\beta} = 2+i$ 이므로

$$\begin{aligned}&\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}\\&= (1+i)(1-i) + (1+i)(2+i) + (1-i)(2-i) + (1-i)(2+i)\\&= (1+1) + (2-1+3i) + (2-1-3i) + (2+1-i)\\&= 7-i\end{aligned}$$

5. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라고 할 때 $|\alpha-\beta|$는 다음 중 어느 것과 같은가 ?

① $\dfrac{\sqrt{D}}{a}$ ② $\dfrac{-\sqrt{D}}{a}$ ③ $\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$

④ $-\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$ ⑤ $-\dfrac{D}{|a|}$

해설

근의 공식을 이용하여 풀면

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

즉 $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ (단, $D=b^2-4ac$)

$$\therefore |\alpha-\beta| = \left|\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right|$$

$$= \left|\frac{-b+\sqrt{D}+b+\sqrt{D}}{2a}\right|$$

$$= \left|\frac{2\sqrt{D}}{2a}\right| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

6. 방정식 $2x^2-6x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=\dfrac{3}{2}$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-2\cdot\dfrac{3}{2}=6$

7. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k < 1$ ② $1 < k < 3$

③ $k < 3$ ④ $3 < k < 5$

⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$

$k^2 - 6k + 5 > 0$, $(k-1)(k-5) > 0$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

8. 이차함수 $y = 2(x-1)^2 + 3$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$y = 2(x-1)^2 + 3$ 의 그래프는 $x = 1$ 일 때 최솟값이 3 이다.

9. 삼차방정식 $x^3+27=0$의 모든 근의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^3+3^3=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3,\ \dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3+\dfrac{3+3\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{2}=0$

해설

$x^3+27=0$에서 x^2의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

10. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
(2) $x^2-3\sqrt{2}x+6=0$

① (1) $\dfrac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
② (1) $\dfrac{3\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
③ (1) $\dfrac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{6}i}{2}$
④ (1) $\dfrac{1\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
⑤ (1) $\dfrac{4\pm 3i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.
(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
$\therefore\ 5x^2-8x+4=0$
$\therefore\ x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-20}}{5}=\dfrac{4\pm 2i}{5}$
(2) $x=\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-24}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

11. 이차방정식 $x^2+(k-4)x+k-1=0$ 이 중근을 가지도록 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
$D=0$ 일 때 중근을 가지므로
$D=(k-4)^2-4(k-1)=k^2-12k+20=0$ 에서
$(k-2)(k-10)=0$
따라서, $k=2$, $k=10$ 이므로 k의 값은 12 이다.

12. 이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 해를 구하기 위해 완전제곱식으로 고쳐 $(x+a)^2=b$ 를 얻었다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$x^2+2x+3=0$ 를 완전제곱식으로 고치면

$(x^2+2x+1)+2=0, \quad (x+1)^2=-2$

$\therefore a=1,\ b=-2$

$\therefore a-b=3$

13. $x=0$ 일 때, 최댓값 -1 을 갖고 한 점 $(2,\ -3)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y=-2(x+1)^2-4$
② $y=(x-2)^2-3$
③ $y=-2(x-1)^2+3$
④ $y=-(x+1)^2+3$
⑤ $y=-\frac{1}{2}x^2-1$

해설

꼭짓점이 $(0,\ -1)$ 이므로 $y=ax^2-1$
$(2,\ -3)$ 을 대입하면 $-3=4a-1$
$a=-\frac{1}{2}$
$\therefore\ y=-\frac{1}{2}x^2-1$

14. x의 범위가 $1 \le x \le 2$ 일 때, 함수 $y = x^2 - x - 1$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$y = x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ 이므로

꼭짓점의 x 좌표 $\frac{1}{2}$ 이 x의 범위에 포함되지 않는다.

$x = 1$ 일 때, $y = -1$ (최솟값),
$x = 2$ 일 때, $y = 1$ (최댓값)
따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 -1 이다.

15. 방정식 $x^3-x^2+ax-1=0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a=3, 1\pm\sqrt{2}$
② $a=-3, 1\pm\sqrt{2}$
③ $a=3, 1\pm\sqrt{3}$
④ $a=-3, 1\pm\sqrt{3}$
⑤ $a=-1, 1\pm\sqrt{2}$

해설

$x=-1$이 근이므로 $-1-1-a-1=0$에서 $a=-3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $=(x+1)(x^2-2x-1)=0$
$x^2-2x-1=0$의 근은 $1\pm\sqrt{2}$
$\therefore a=-3$, 나머지 근은 $1\pm\sqrt{2}$

16. 삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1-\sqrt{2}$, 2 ② $-1+\sqrt{2}$, -3 ③ $1-\sqrt{2}$, 3
④ $1-\sqrt{2}$, -3 ⑤ $-1+\sqrt{2}$, 3

해설
한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})+\alpha=5,\quad \alpha=3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1-\sqrt{2}$

17. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x - y = 1 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x = y + 1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2 + y^2 = 5$

$y^2 + y - 2 = 0$

$(y+2)(y-1) = 0$

$\therefore\ y = -2$ 또는 $y = 1$

$y = -2$를 ㉠에 대입하면 $x = -1$

$y = 1$을 ㉡에 대입하면 $x = 2$

$\therefore\ xy = 2$

18. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0$$

① $0,\ \pm 1$　② $0,\ \pm 2$　③ $\pm 1,\ \pm 2$

④ $\pm 2,\ \pm 3$　⑤ $\pm 3,\ \pm 4$

해설

(i) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$ 에서
$x \geq 0$ 일 때,
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x-2)(x-3) = 0$
$\therefore x = 2$, 또는 $x = 3$
(ii) $x < 0$ 일 때,
$x^2 + 5x + 6 = 0$
$(x+2)(x+3) = 0$
$\therefore x = -2$, 또는 $x = -3$
(i), (ii) 에서 $x = \pm 2,\ x = \pm 3$

19. 방정식 $2[x]^2 - [x] - 1 = 0$의 해를 $a \le x < b$라 할 때, $2a + b$의 값을 구하면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$2[x]^2 - [x] - 1 = (2[x] + 1)([x] - 1) = 0$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $[x] = 1$

$\therefore 1 \le x < 2$

$\therefore a = 1, b = 2$이므로 $2a + b = 4$

20. 이차방정식 $x^2-(k-1)x+k=0$의 두 근의 비가 $2:3$일 때, 실수 k 값의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

두 근의 비가 $2:3$이므로 두 근을 2α, 3α라 하면

$2\alpha+3\alpha=5\alpha=k-1$ ⋯⋯㉠

$(2\alpha)(3\alpha)=6\alpha^2=k$ ⋯⋯㉡

㉠에서 $\alpha=\frac{k-1}{5}$,

이것을 ㉡에 대입하면 $6k^2-37k+6=0$

$\therefore$ $k=6$, $\frac{1}{6}$

21. 원점을 지나고 이차함수 $f(x)=x^2+ax+2$에 접하는 두 개의 직선이 서로 직교할 때, 점 $(a,\ b)$의 자취를 나타내는 방정식은? (단, $b>0$이다.)

① $b=\frac{1}{2}(a+1)$ ② $b=\frac{1}{8}(a^2+1)$ ③ $b=\frac{1}{4}a^2$
④ $b=\frac{1}{6}(a-3)^2$ ⑤ $b=\frac{1}{12}a^2-4$

해설

원점을 지나는 직선 $y=mx$라 두면,
$x^2+ax+2b=mx$
$x^2+(a-m)x+2b=0$

$$\begin{aligned} D &= (a-m)^2-8b=0 \\ &= m^2-2am+a^2-8b=0 \end{aligned}$$

두 직선이 직교할 때, 기울기의 곱은 -1 이므로,
근과 계수의 관계에서
$a^2-8b=-1$
$\therefore\ b=\frac{1}{8}(a^2+1)$

22. 함수 $f(x)=(x^2-2x+2)(x^2-2x+3)+3x^2-6x$ 의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2-2x+2=t$ 로 놓으면
$t=(x-1)^2+1\geq 1$ 이고

$$\begin{aligned} f(x)=g(t)&=t(t+1)+3t-6\\ &=t^2+4t-6\\ &=(t+2)^2-10\ (t\geq 1) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은
$g(1)=(1+2)^2-10=-1$

23. 삼차방정식 $x^3-6x^2-7x-5=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ 의 값은?

① -15 ② 16 ③ -16 ④ 17 ⑤ -17

해설

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=6,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7,\ \alpha\beta\gamma=5$
$\therefore\quad (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

해설

$f(x)=x^3-6x^2-7x-5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$이므로
$f(1)=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

24. $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\dfrac{\omega^2}{\omega^{10}+1} + \dfrac{\omega^{10}+1}{\omega^2}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$,

$2\omega + 1 = -\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$

따라서 $x^2 + x + 1 = 0$의 근이 ω이다.

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 1 = 0$

$\therefore \omega^3 = 1$

$$(\text{준식}) = \frac{-(1+\omega)}{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1} + \frac{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1}{-(1+\omega)}$$

$$= \frac{-(\omega+1)}{(\omega+1)} + \frac{(\omega+1)}{-(\omega+1)} = -2$$

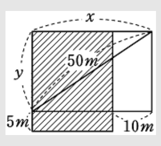
25. 대각선의 길이가 50 m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5 m 늘리고, 가로를 10 m 줄이면 넓이가 50 m² 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 48 m

해설

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m 라 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots ㉠ \\ (x-10)(y+5) = xy + 50 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$\therefore\ x = 2y + 20 \quad \cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$(2y+20)^2 + y^2 = 50^2$

$y^2 + 16y - 420 = 0$

$(y-14)(y+30) = 0$

$\therefore\ y = 14,\ -30$

그런데 $0 < y < 50$ 이므로 $y = 14$

이것을 ㉢에 대입하면 $x = 48$