1. 등식 $\dfrac{x}{1+2i}+\dfrac{y}{1-2i}=1-\dfrac{i}{5}$ 를 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $16xy$ 의 값은?

① 97 ② 98 ③ 99 ④ 100 ⑤ 101

해설

$$(\text{좌변})=\frac{x}{1+2i}+\frac{y}{1-2i}$$
$$=\frac{x(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\frac{y(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$\dfrac{(x+y)+2(y-x)i}{5}$ 이므로

$$\frac{x+y}{5}+\frac{2(y-x)i}{5}=1-\frac{i}{5}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{x+y}{5}=1\ ,\ \frac{2(y-x)}{5}=-\frac{1}{5}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=\frac{11}{4},\ y=\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ 16xy=16\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{9}{4}=99$$

2. 허수단위 i에 대하여 $i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$을 간단히하면?

① $1+i$ ② $-1+i$ ③ $2i$

④ $2+i$ ⑤ 2

해설

$$i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$$
$$=i+(-1)+(-i)+1+i+(-1)$$
$$=-1+i$$

3. $a = 2 + \sqrt{3}i,\ b = 2 - \sqrt{3}i$ 일 때, $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{7}$

해설

$a = 2 + \sqrt{3}i,\ b = 2 - \sqrt{3}i$ 일 때

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b^2 + a^2}{ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} \cdots ㉠$$

이 때, $a + b = (2 + \sqrt{3}i) + (2 - \sqrt{3}i) = 4$

$ab = (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i)$

$= 2^2 - (\sqrt{3}i)^2 = 4 + 3 = 7$ 이므로

$a + b = 4,\ ab = 7$ 을 ㉠에 대입하면

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab}$$

$$= \frac{16 - 14}{7} = \frac{2}{7}$$

4. $\alpha = 1 + i$, $\beta = 2 - i$ 의 켤레복소수를 각각 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 라 할 때, $\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}$ 의 값은?

① 0 ② 3 ③ $7-2i$ ④ $7-i$ ⑤ $7+i$

해설

$\alpha = 1 + i$, $\beta = 2 - i$ 에서 $\overline{\alpha} = 1 - i$, $\overline{\beta} = 2 + i$ 이므로

$\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}$

$= (1+i)(1-i) + (1+i)(2+i) + (1-i)(2-i) + (1-i)(2+i)$

$= (1+1) + (2-1+3i) + (2-1-3i) + (2+1-i)$

$= 7 - i$

5. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라고 할 때 $|\alpha-\beta|$는 다음 중 어느 것과 같은가 ?

① $\dfrac{\sqrt{D}}{a}$ ② $\dfrac{-\sqrt{D}}{a}$ ③ $\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$

④ $-\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$ ⑤ $-\dfrac{D}{|a|}$

해설

근의 공식을 이용하여 풀면

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

즉 $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ (단, $D=b^2-4ac$)

$$\therefore |\alpha-\beta|=\left|\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right|$$

$$=\left|\frac{-b+\sqrt{D}+b+\sqrt{D}}{2a}\right|$$

$$=\left|\frac{2\sqrt{D}}{2a}\right|=\frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

6. 방정식 $2x^2 - 6x + 3 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$\alpha + \beta = 3,\ \alpha\beta = \dfrac{3}{2}$

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 - 2 \cdot \dfrac{3}{2} = 6$

7. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k < 1$

② $1 < k < 3$

③ $k < 3$

④ $3 < k < 5$

⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$$

$k^2 - 6k + 5 > 0$, $(k-1)(k-5) > 0$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

8. 이차함수 $y = 2(x-1)^2 + 3$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

$y = 2(x-1)^2 + 3$ 의 그래프는 $x = 1$ 일 때 최솟값이 3 이다.

9. 삼차방정식 $x^3+27=0$의 모든 근의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^3+3^3=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3, \dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3+\dfrac{3+3\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{2}=0$

해설

$x^3+27=0$에서 x^2의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

10. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$ (2) $x^2-3\sqrt{2}x+6=0$

① (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

② (1) $\frac{3\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

③ (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{6}i}{2}$

④ (1) $\frac{1\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

⑤ (1) $\frac{4\pm 3i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$

$\therefore\ 5x^2-8x+4=0$

$$\therefore\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{5}=\frac{4\pm 2i}{5}$$

(2) $x=\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-24}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

11. 이차방정식 $x^2+(k-4)x+k-1=0$ 이 중근을 가지도록 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
$D=0$ 일 때 중근을 가지므로
$D=(k-4)^2-4(k-1)=k^2-12k+20=0$ 에서
$(k-2)(k-10)=0$
따라서, $k=2$, $k=10$ 이므로 k의 값은 12 이다.

12. 이차방정식 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 해를 구하기 위해 완전제곱식으로 고쳐 $(x+a)^2 = b$ 를 얻었다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2 + 2x + 3 = 0$ 를 완전제곱식으로 고치면

$(x^2 + 2x + 1) + 2 = 0, \quad (x+1)^2 = -2$

$\therefore a = 1,\ b = -2$

$\therefore a - b = 3$

13. $x = 0$ 일 때, 최댓값 -1 을 갖고 한 점 $(2,\ -3)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y = -2(x+1)^2 - 4$

② $y = (x-2)^2 - 3$

③ $y = -2(x-1)^2 + 3$

④ $y = -(x+1)^2 + 3$

⑤ $y = -\dfrac{1}{2}x^2 - 1$

해설

꼭짓점이 $(0,\ -1)$ 이므로 $y = ax^2 - 1$

$(2,\ -3)$ 을 대입하면 $-3 = 4a - 1$

$a = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ y = -\dfrac{1}{2}x^2 - 1$

14. x의 범위가 $1 \le x \le 2$ 일 때, 함수 $y = x^2 - x - 1$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -5　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 3

해설

$y = x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ 이므로

꼭짓점의 x 좌표 $\frac{1}{2}$ 이 x의 범위에 포함되지 않는다.

$x = 1$ 일 때, $y = -1$ (최솟값),

$x = 2$ 일 때, $y = 1$ (최댓값)

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 -1 이다.

15. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$

② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$

④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

16. 삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1-\sqrt{2}$, 2 ② $-1+\sqrt{2}$, -3 ③ $1-\sqrt{2}$, 3

④ $1-\sqrt{2}$, -3 ⑤ $-1+\sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.

삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로

$\therefore\ 1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})+\alpha=5,\quad \alpha=3$

$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1-\sqrt{2}$

17. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2+y^2=5$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

$\therefore\ xy=2$

18. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0$$

① 0, ± 1　　② 0, ± 2　　③ ± 1, ± 2

④ ± 2, ± 3　　⑤ ± 3, ± 4

해설

(i) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$에서

$x \geq 0$일 때,

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-2)(x-3) = 0$

$\therefore x = 2$, 또는 $x = 3$

(ii) $x < 0$일 때,

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x+2)(x+3) = 0$

$\therefore x = -2$, 또는 $x = -3$

(i), (ii)에서 $x = \pm 2$, $x = \pm 3$

19. 방정식 $2[x]^2 - [x] - 1 = 0$의 해를 $a \le x < b$라 할 때, $2a + b$의 값을 구하면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2[x]^2 - [x] - 1 = (2[x] + 1)([x] - 1) = 0$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $[x] = 1$

$\therefore 1 \le x < 2$

$\therefore a = 1, b = 2$이므로 $2a + b = 4$

20. 이차방정식 $x^2-(k-1)x+k=0$의 두 근의 비가 $2:3$일 때, 실수 k 값의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

두 근의 비가 $2:3$이므로 두 근을 2α, 3α라 하면

$2\alpha+3\alpha=5\alpha=k-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$(2\alpha)(3\alpha)=6\alpha^2=k \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $\alpha=\dfrac{k-1}{5}$,

이것을 ㉡에 대입하면 $6k^2-37k+6=0$

$\therefore\ k=6,\ \dfrac{1}{6}$

21. 원점을 지나고 이차함수 $f(x) = x^2 + ax + 2$에 접하는 두 개의 직선이 서로 직교할 때, 점 $(a,\ b)$의 자취를 나타내는 방정식은? (단, $b > 0$이다.)

① $b = \frac{1}{2}(a+1)$　② $b = \frac{1}{8}(a^2+1)$　③ $b = \frac{1}{4}a^2$

④ $b = \frac{1}{6}(a-3)^2$　⑤ $b = \frac{1}{12}a^2 - 4$

해설

원점을 지나는 직선 $y = mx$라 두면,

$x^2 + ax + 2b = mx$

$x^2 + (a-m)x + 2b = 0$

$$D = (a-m)^2 - 8b = 0$$
$$= m^2 - 2am + a^2 - 8b = 0$$

두 직선이 직교할 때, 기울기의 곱은 -1 이므로,

근과 계수의 관계에서

$a^2 - 8b = -1$

$\therefore\ b = \frac{1}{8}(a^2+1)$

22. 함수 $f(x)=(x^2-2x+2)(x^2-2x+3)+3x^2-6x$ 의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2-2x+2=t$ 로 놓으면

$t=(x-1)^2+1\geq 1$ 이고

$$\begin{aligned} f(x) &= g(t) = t(t+1)+3t-6 \\ &= t^2+4t-6 \\ &= (t+2)^2-10\ (t\geq 1) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은

$g(1)=(1+2)^2-10=-1$

23. 삼차방정식 $x^3-6x^2-7x-5=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ 의 값은?

① -15 ② 16 ③ -16 ④ 17 ⑤ -17

해설

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta+\gamma=6,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7,\ \alpha\beta\gamma=5$

$\therefore\quad (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

해설

$f(x)=x^3-6x^2-7x-5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$이므로

$f(1)=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

24. $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\dfrac{\omega^2}{\omega^{10}+1} + \dfrac{\omega^{10}+1}{\omega^2}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$,

$2\omega + 1 = -\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$

따라서 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이 ω 이다.

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 1 = 0$

$\therefore \omega^3 = 1$

$$(\text{준식}) = \frac{-(1+\omega)}{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1} + \frac{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1}{-(1+\omega)}$$

$$= \frac{-(\omega+1)}{(\omega+1)} + \frac{(\omega+1)}{-(\omega+1)} = -2$$

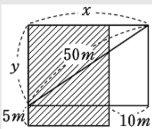
25. 대각선의 길이가 50 m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5 m 늘리고, 가로를 10 m 줄이면 넓이가 50 m^2 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 48 m

해설

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m 라 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots ㉠ \\ (x-10)(y+5) = xy + 50 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$\therefore\ x = 2y + 20 \quad \cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$(2y+20)^2 + y^2 = 50^2$

$y^2 + 16y - 420 = 0$

$(y-14)(y+30) = 0$

$\therefore\ y = 14,\ -30$

그런데 $0 < y < 50$ 이므로 $y = 14$

이것을 ㉢에 대입하면 $x = 48$