1. $-2 \le x \le -1$ 일 때, $A = \dfrac{12}{2-x}$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 $p \le A \le q$ 이다. 이 때, pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$-2 \le x \le -1$ 의 각 변에 -1 을 곱하면

$1 \le -x \le 2$

다시 각 변에 2를 더하면 $3 \le 2-x \le 4$

각 변의 역수를 취하면 $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{2-x} \le \dfrac{1}{3}$

각 변에 12 를 곱하면 $3 \le \dfrac{12}{2-x} \le 4$

$\therefore p = 3, q = 4$

$\therefore pq = 12$

2. $0 \le x+2y \le 1,\ 0 \le -x+y \le 1$ 일 때 $2x+3y$ 의 최댓값과 최솟값의 차는 ?

① 0　　② 1　　③ 3　　④ 4　　⑤ 6

해설

$$\begin{array}{rl} & 0 \le x+2y \le 1 \\ +) & \underline{0 \le -x+y \le 1} \\ & 0 \le \ 3y \ \le 2 \cdots\cdots ㉠ \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 0 \le \ \ x+2y \le 1 \\ -) & \underline{0 \le -2x+2y \le 2} \\ & -2 \ \le \ 3x \ \ \le 1 \rightarrow -\frac{2}{3} \le x \le \frac{1}{3} \cdots\cdots ㉡ \end{array}$$

㉠ + ㉡ × 2 하면

$$\begin{array}{rl} & 0 \le 3y \le 2 \\ +) & \underline{-\frac{4}{3} \le 2x \le \frac{2}{3}} \end{array}$$

$\therefore -\frac{4}{3} \le 3y+2x \le \frac{8}{3}$

$\therefore$ 최댓값 − 최솟값 $= \frac{8}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{12}{3} = 4$

3. 부등식 $ax-b^2>bx+a^2-8$의 해가 모든 실수이기 위한 a 의 조건은? (a, b는 실수)

① $a=b$이고 $-1<a<1$
② $a=b$이고 $-2<a<2$
③ $a=b$이고 $-3<a<3$
④ $a=b$이고 $-4<a<4$
⑤ $a=b$이고 $-5<a<5$

해설

$ax-b^2>bx+a^2-8$에서
$(a-b)x-b^2-a^2+8>0$이 모든 x에 대해서 성립해야 하므로
$a=b$
$\therefore -2a^2+8>0 \quad 2a^2<8$
$\therefore a^2<4$ 이므로 $-2<a<2$
즉 $a=b$ 이고 $-2<a<2$

4. x에 대한 부등식 $x+2 \le ax+3$ 의 해가 모든 실수일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x+2 \le ax+3$에서 $(1-a)x \le 1$이 부등식의 해가 모든 실수이고 우변이 양수이므로 x의 계수는 0이어야 한다.

$1-a=0$

$\therefore a=1$

5. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $k^2x+1 > 2kx+k$가 성립할 때, k값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$k^2x+1 > 2kx+k$에서
$(k^2-2k)x > k-1$,
$k(k-2)x > k-1$
해가 모든 실수이므로
$k(k-2)=0,\ k-1<0$ 이어야 한다.
$\therefore\ k=0$

6. x에 대한 부등식 $(a+b)x+a-2b>0$의 해가 $x<1$일 때, x에 대한 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$의 해는?

① $x<-10$　② $x<-5$　③ $x>-5$
④ $x<5$　⑤ $x>5$

해설

$(a+b)x+a-2b>0$에서 $(a+b)x>-a+2b\cdots$㉠
㉠의 해가 $x<1$이려면 $a+b<0\cdots$㉡
㉠이 양변을 $a+b$로 나누면 $x<\dfrac{-a+2b}{a+b}$이므로
$\dfrac{-a+2b}{a+b}=1,\ -a+2b=a+b$
$\therefore 2a=b\cdots$㉢
㉢을 ㉡에 대입하면 $a+2a=3a<0\ \therefore a<0$
㉢을 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$에 대입하면
$(2a-3a)x+a+4a>0,\ -ax>-5a\ \therefore x>5$

7. $(a+b)x+(2a-3b)<0$의 해가 $x<-\frac{1}{3}$일 때, 부등식 $(a-3b)x+(b-2a)>0$을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x<-3$

해설

$(a+b)x+(2a-3b)<0$

$(a+b)x<3b-2a$

$\Rightarrow \quad x<\frac{3b-2a}{a+b}=-\frac{1}{3} \ (a+b>0)$

$\Rightarrow \quad a+b=-3(3b-2a)$

$\Rightarrow \quad a=2b, \quad a+b=3b>0 \rightarrow \ b>0$

$(a-3b)x+(b-2a)>0 \ \Leftrightarrow \ -bx-3b>0$

$bx<-3b$

$\therefore \quad x<-3 \ (\because \ b>0)$

8. x에 대한 부등식 $ax + b < 0$의 해가 $x > -1$일 때, 부등식 $(a+b)x + 3a - b > 0$의 해를 구하면?

① $x > -1$　　② $x < -1$　　③ $x > -3$

④ $x < -3$　　⑤ $x < 5$

해설

$ax + b < 0$

$ax < -b$

해가 $x > -1$이므로 $a < 0$

$x > -\frac{b}{a}$

$\Rightarrow \ -\frac{b}{a} = -1 \ \Rightarrow \ a = b$

$(a+b)x + 3a - b > 0$

$2ax + 2a > 0$

$2ax > -2a$

$x < -1 \ (\because \ a < 0)$

9. 연립부등식 $\begin{cases} 4x-1<3x+5 \\ 6x+a \le 7x+1 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 정수의 개수가 2개 일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

▶ 답 :

▷ 정답 : $4 < a \le 5$

해설

$4x-1<3x+5$ 를 풀면 $x<6$ 이고, $6x+a \le 7x+1$ 을 풀면 $a-1 \le x$ 이다.
따라서 $a-1 \le x < 6$ 을 만족하는 정수의 개수가 2개이기 위해서 $3 < a-1 \le 4$, 따라서 $4 < a \le 5$ 이다.

10. 연립부등식 $\begin{cases} 3x > a \\ 5x - 1 \le 4x + 9 \end{cases}$ 을 만족하는 정수의 개수가 4 일 때, a 의 값의 범위는?

① $16 \le a < 17$　② $17 \le a < 19$　③ $18 \le a < 19$
④ $18 \le a < 21$　⑤ $20 \le a < 21$

해설

$5x - 1 \le 4x + 9$ 를 풀면 $x \le 10$ 이고, $3x > a$ 를 풀면 $x > \frac{a}{3}$ 이다. 따라서 $\frac{a}{3} < x \le 10$ 이고 만족하는 정수의 개수가 4 개가 되기 위해서 $6 \le \frac{a}{3} < 7$, 따라서 $18 \le a < 21$ 이다.

11. 연립부등식 $-5x-30<3x+10<6x+16$, $2x-a\le 2a-8$ 을 만족하는 정수해가 오직 하나일 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\le a<\frac{8}{3}$

해설

$$\begin{cases} -5x-30<3x+10 & \cdots ㉠ \\ 3x+10<6x+16 & \cdots ㉡ \\ 2x-a\le 2a-8 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠에서 $x>-5$

㉡에서 $x>-2$

㉢에서 $x\le\frac{3a-8}{2}$

$\therefore\ -2<x\le\frac{3a-8}{2}$

이 연립부등식이 정수해를 오직 하나만 포함하므로 $-1\le\frac{3a-8}{2}<0$

따라서 a 값의 범위는 $2\le a<\frac{8}{3}$ 이다.

12. 연립부등식 $\begin{cases} 2(x+1) \geq 4x \\ 6x+a > -5 \end{cases}$ 의 해가 정수인 해를 2개만 갖도록 하는 상수 a의 범위는?

▶ 답 :

▷ 정답 : $-5 < a \leq 1$

해설

$$\begin{cases} 2(x+1) \geq 4x & \cdots (1) \\ 6x+a > -5 & \cdots (2) \end{cases}$$

(1) $2x+2 \geq 4x$

$\therefore x \leq 1$

(2) $6x > -a-5$

$\therefore x > \dfrac{-a-5}{6}$

$\dfrac{-a-5}{6} \leq x \leq 1$

$-1 \leq \dfrac{-a-5}{6} < 0$

$-6 \leq -a-5 < 0$

$-1 \leq -a < 5$

$\therefore \ -5 < a \leq 1$

13. 연립부등식

$$\begin{cases} 12 - x < 2(x+1) + 1 < 4x - 1 \\ -a < x < a \end{cases}$$

의 해가 없을 때, 양수 a 의 값의 범위는?

① $0 < a < 2$　② $0 < a \le 2$　③ $0 < a < 3$

④ $0 < a \le 3$　⑤ $2 < a < 3$

해설

$$\begin{cases} 12 - x < 2(x+1) + 1 < 4x - 1 \cdots ㉠ \\ -a < x < a \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ : $12 - x < 2(x+1) + 1$ 의 해는 $x > 3$

$2(x+1) + 1 < 4x - 1$ 의 해는 $x > 2$

$\therefore\ x > 3$

㉡ : $-a < x < a$

연립부등식의 해가 없으려면 다음 그림과 같아야 하므로 양수 a 의 값의 범위는 $0 < a \le 3$ 이다.

14. 연립부등식

$$\begin{cases} 4x - a < 3x \\ 3(x-2) \geq 2x - 1 \end{cases}$$

의 해가 없을 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < 10$　② $a \leq 10$　③ $a > 5$

④ $a \leq 5$　⑤ $a > 3$

해설

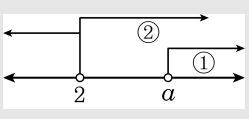
$4x - a < 3x$, $x < a$, $3(x-2) \geq 2x - 1$, $x \geq 5$, 해가 없으려면 $a \leq 5$

15. 연립부등식 $\begin{cases} x > a \\ x \le 2 \end{cases}$ 의 해가 없도록 하는 a 의 값 중 가장 작은 값은?

① -2　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$\begin{cases} x > a \\ x \le 2 \end{cases}$ 의 해가 없으려면



$x > a$ 는 ①이거나 ②이므로 $a \ge 2$
따라서 a 의 가장 작은 수는 2 이다.

16. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-1< & 3 \\ x+3\geq & a \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 이를 만족하는 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$\begin{cases} 2x-1<3\cdots① \\ x+3\geq a\cdots② \end{cases}$ 라 두면,

① : $2x<4$

$x<2$

② : $x\geq a-3$

이고, 해가 존재하지 않으려면 $a-3\geq 2$ 이다.

따라서 $a\geq 5$ 이므로 a의 최솟값은 5이다.

17. 부등식 $\frac{k}{2}+1>|1-x|$을 만족하는 x의 값이 존재하지 않도록 하는 상수 k 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k \le -2$

해설

$\frac{k}{2}+1>|1-x|$ 에서 $-\frac{k}{2}-1<1-x<\frac{k}{2}+1$

$\therefore\ -\frac{k}{2}<x<\frac{k+4}{2}$

이때, 부등식의 해가 존재하지 않기 위해서는 $-\frac{k}{2} \ge \frac{k+4}{2}$ 이어야 하므로

$\therefore\ k \le -2$

18. 부등식 $|x-3|+|x-6| \le 9$ 를 만족하는 최댓값과 최솟값의 차를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

1) $x<3$ 일 때
$-(x-3)-(x-6) \le 9,\ x \ge 0 \qquad \therefore\ 0 \le x < 3$
2) $3 \le x < 6$ 일 때
$x-3-(x-6) \le 9,\ 3 \le 9$ 따라서 모든 조건이 성립하고 조건이 $3 \le x < 6$ 이므로
$\therefore\ 3 \le x < 6$
3) $x \ge 6$ 일 때
$x-3+x-6 \le 9,\ x \le 9 \qquad \therefore\ 6 \le x \le 9$
1), 2), 3) 에 의해서 주어진 부등식의 해는 $0 \le x \le 9$ 이므로 최댓값과 최솟값의 차는
$\therefore\ 9-0=9$

19. 부등식 $3-|2-x| \le -1$의 해를 구하면?

① $x \ge 4$ 또는 $x \le -1$
② $x \ge 6$ 또는 $x \le -2$
③ $-2 \le x \le 4$
④ $-1 \le x \le 4$
⑤ $0 \le x \le 4$

해설

i) $x < 2$일때, $3-(2-x) \le -1$, $x \le -2$
$\therefore x \le -2$
ii) $x \ge 2$일때, $3-(x-2) \le -1$, $x \ge 6$
$\therefore x \ge 6$

20. x가 정수일 때, $|x-2| \le 5, x < 3$ 를 동시에 만족하는 x의 값을 모두 더하면?

① -7　② -5　③ -3　④ -1　⑤ 0

해설

$|x-2| \le 5 \leftrightarrow -3 \le x \le 7$

x는 $-3 \le x < 3$인 정수

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$

21. 부등식 $2\sqrt{(x+2)^2}+|x-1|\le 6$의 해를 구하면?

① $-3\le x<-2$　　② $-2\le x<1$

③ $x\le -2$ 또는 $x>1$　　④ $x\le -3$ 또는 $x\ge 1$

⑤ $-3\le x\le 1$

해설

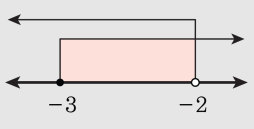
$2|x+2|+|x-1|\le 6$

i) $x<-2$일 때

$-2(x+2)-(x-1)\le 6$

$-3x\le 9,\ \ x\ge -3$

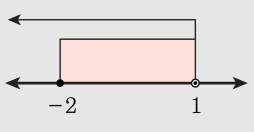
$\therefore -3\le x<-2$



ii) $-2\le x<1$일 때

$2(x+2)-(x-1)\le 6,\ \ x\le 1$

$\therefore -2\le x<1$

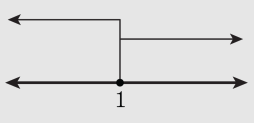


iii) $x\ge 1$일 때

$2(x+2)+(x-1)\le 6$

$3x\le 3,\ \ x\le 1$

$\therefore x=1$



$\therefore$ i), ii), iii) 에 의해 $-3\le x\le 1$

22. 부등식 $3|x-1|+2|x+1|<6$을 풀면?

① $x>-1$　　② $x<\frac{7}{5}$　　③ $1\le x<\frac{7}{5}$

④ $-1<x<\frac{7}{5}$　　⑤ $-3\le x<-1$

해설

$3|x-1|+2|x+1|<6$에서

i) $x<-1$일 때,

$3(-x+1)+2(-x-1)<6 \quad \therefore\ x>-1$

이것은 $x<-1$의 조건에 맞지 않는다.

ii) $-1\le x<1$일 때,

$3(-x+1)+2(x+1)<6 \quad \therefore\ x>-1$

이것과 $-1\le x<1$로 부터

$-1<x<1$ ····· ㉠

iii) $x\ge 1$일 때,

$3(x-1)+2(x+1)<6 \quad \therefore\ x<\frac{7}{5}$

이것과 $x\ge 1$로 부터

$1\le x<\frac{7}{5}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에 의하여 구하는 해는 $-1<x<\frac{7}{5}$

23. 부등식 $|x-k| \le 3$을 만족하는 x의 값 중에서 최댓값과 최솟값의 곱이 9일 때, 양수 k의 값은?

① $\sqrt{2}$　② 2　③ $3\sqrt{2}$　④ 4　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$|x-k| \le 3$에서 $-3 \le x-k \le 3$,
$-3+k \le x \le 3+k$
따라서 x의 최댓값은 $3+k$,
최솟값은 $-3+k$이므로
$(-3+k)(3+k)=9$
$k^2-9=9$
$k^2=18 \quad \therefore k=\pm 3\sqrt{2}$
k는 양수이므로 $3\sqrt{2}$

24. 부등식 $|2x-a|>7$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\frac{a-7}{2}$ 또는 $x>\frac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\frac{a-7}{2}=-1,\ \frac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5,\ b=6$

$\therefore a+b=11$

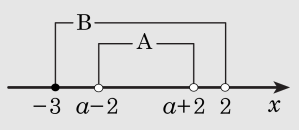
25. $|x-a|<2$가 $-3 \le x < 2$에 완전히 포함된다고 할 때, 정수 a의 가 될 수 있는 수들의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$|x-a|<2 \Leftrightarrow -2<x-a<2 \Leftrightarrow a-2<x<a+2$

다음 그림에서



$-3 \le a-2,\ a+2 \le 2$

$\therefore -1 \le a \le 0$

따라서 위의 부등식을 만족하는 정수 a의 값은

$-1,\ 0$이고, 그 합은 -1이다.