

1. $x - y = 1$ 을 만족하는 모든 실수 x, y 에 대하여 등식 $3x^2 - 5x + 1 = ay^2 + by + c$ 이 항상 성립할 때, $a + b + c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 상수)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x = y + 1$ 을 주어진 식에 대입한 후,
 y 에 대한 내림차순으로 정리한다.
 $3(y + 1)^2 - 5(y + 1) + 1 = ay^2 + by + c$
 $(3 - a)y^2 + (1 - b)y - 1 - c = 0$
 $\therefore a = 3, b = 1, c = -1$
 $\therefore a + b + c = 3$

2. 다항식 $(x-1)^3 + 27$ 을 바르게 인수분해한 것은?

① $(x-1)(x^2+3)$

② $(x-1)(x^2-x-2)$

③ $(x-1)(x^2+3x+3)$

④ $(x+2)(x^2+x+7)$

⑤ $(x+2)(x^2-5x+13)$

해설

$x-1$ 을 A 로 치환하면

$$\text{준식} = A^3 + 27 = (A+3)(A^2-3A+9)$$

다시 $x-1$ 을 대입하면 $(x+2)(x^2-5x+13)$

3. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$

② $(x-1)(x+2)(x+3)$

③ $(x-1)(x-2)(x-3)$

④ $(x+1)(x+2)(x-3)$

⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면

$f(1) = 0, f(2) = 0, f(3) = 0$ 이므로

(준식) $= (x-1)(x-2)(x-3)$

4. $x^3 + x^2 + 2$ 를 다항식 $x^2 + 2x - 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $Q(x) + R(x)$ 의 값은?

① $2x - 3$

② $2x$

③ $3x + 2$

④ $4x$

⑤ $4x + 1$

해설

$x^3 + x^2 + 2$ 를 $x^2 + 2x - 1$ 로 직접 나누면

$$Q(x) = x - 1, \quad R(x) = 3x + 1$$

$$\therefore Q(x) + R(x) = 4x$$

5. $(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^3 - b^3)$ 의 전개식으로 옳은 것은?

① $a^3 + b^3$

② $a^6 + b^6$

③ $a^6 - b^6$

④ $a^9 + b^9$

⑤ $a^9 - b^9$

해설

(준 식) $= (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) = a^6 - b^6$

6. 모든 모서리의 합이 36, 겹넓이가 56인 직육면체의 대각선의 길이는?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a , b , c 라 하자.

$$4(a+b+c) = 36, 2(ab+bc+ca) = 56$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 81 - 56 = 25$$

$$\therefore (\text{대각선의 길이}) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ = \sqrt{25} = 5$$

7. $\frac{2x+3a}{4x+1}$ 가 x 에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a = 2$

해설

$\frac{2x+3a}{4x+1} = k$ (일정값 $= k$)라 놓으면 $2x+3a = k(4x+1)$ 에서

$$(2-4k)x + 3a - k = 0$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로,

$$2-4k = 0, 3a - k = 0$$

$$k = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } 3a = k \text{ 에서 } a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 12a = 2$$

8. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 을 $(x-1)^2$ 을 나누었을 때 나머지가 $2x + 1$ 이 되도록 상수 $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로
$$x^3 + ax^2 + bx + 3$$
$$= (x-1)^2(x+k) + 2x + 1$$
$$= x^3 + (k-2)x^2 + (3-2k)x + k + 1$$
양변의 계수를 비교하면
$$a = k - 2, \quad b = 3 - 2k, \quad 3 = k + 1$$
$$k = 2 \text{ 이므로 } a = 0, \quad b = -1$$
$$\therefore a - b = 0 - (-1) = 1$$

9. $x^3 - x^2 + 2 = (x + 1)^3 + a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$ 가 항등식일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

조립제법에 의한 방법으로 풀면

-1	1	-1	0	2
		-1	2	-2
-1	1	-2	2	0
		-1	3	
-1	1	-3	5	
		-1		
	1	-4		

$\therefore a = -4, b = 5, c = 0$

$\therefore a + b + c = 1$

해설

주어진 식의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$2 = 1 + a + b + c$

$\therefore a + b + c = 1$

10. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 5이고, $x - 2$ 로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이 때, $m + n$ 의 값은?

- ① $-\frac{19}{3}$ ② $-\frac{25}{6}$ ③ $-\frac{29}{6}$ ④ $-\frac{14}{3}$ ⑤ $-\frac{7}{2}$

해설

$$f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 1$$

$$f(x) = (x + 1)Q_1(x) + 5 \text{ 으로 놓으면 } f(-1) = 5$$

$$f(x) = (x - 2)Q'(x) \text{ 으로 놓으면 } f(2) = 0$$

$$\text{따라서, } f(-1) = -1 + m - n + 1 = 5$$

$$f(2) = 8 + 4m + 2n + 1 = 0$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } m = \frac{1}{6}, \quad n = -\frac{29}{6}$$

$$\therefore m + n = -\frac{28}{6} = -\frac{14}{3}$$

11. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 2이고, $x+2$ 로 나눈 나머지가 5이다. 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)(x+2)$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(2)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

나머지 정리에 의하여,
 $f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$ 라 할 수 있다.
 $f(1) = a + b = 2$
 $f(-2) = -2a + b = 5$
연립하면, $a = -1$ $b = 3$
 $\therefore R(x) = -x + 3$
 $R(2) = 1$

12. $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$ 으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$ 를 x^2+2x-3 으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x+1$

해설

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-1)Q(x) + 3 \\&= (x-1)\{(x+3)Q'(x) + 2\} + 3 \\&= (x-1)(x+3)Q'(x) + 2(x-1) + 3 \\&= (x^2+2x-3)Q'(x) + 2x+1\end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

13. $2x^3 + 9x^2 + 11x + 7 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 가 x 에 대한 항등식일 때, a, b, c, d 를 차례로 구하면?
- ① 3, -1, 3, 2

② 2, 3, -1, 3

③ -3, 1, -3, -2

④ -2, -3, 1, -3

⑤ 1, -3, 4, -2

해설

조립제법을 이용하면

-1	2	9	11	7	
		-2	-7	-4	
-1	2	7	4	3	← d
		-2	-5		
-1	2	5	-1		← c
		-2			
	2	3			← b
	↑				
	a				

$a = 2, b = 3, c = -1, d = 3$

14. 세 변의 길이가 a, b, c 인 $\triangle ABC$ 에 대하여 $a^2 - ab + b^2 = (a + b - c)c$ 인 관계가 성립할 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$$a^2 - ab + b^2 = (a + b - c)c \text{에서 } a^2 - ab + b^2 = ac + bc - c^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \left\{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right\} = 0$$

$$\therefore a = b = c$$

따라서, $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.

15. $x^4 - 6x^2 + 1$ 을 인수분해 하였더니 $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ 가 되었다.
이 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하면?

① -2 ② 2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 6x^2 + 1 &= (x^4 - 2x^2 + 1) - 4x^2 \\&= (x^2 - 1)^2 - (2x)^2 \\&= (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1) \\&= (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \\&\therefore a + b + c + d = -2\end{aligned}$$

16. $2x^2 + xy - y^2 + 10x + 4y + 12$ 를 x, y 의 두 일차식의 곱으로 인수분해하면, $(x + ay + b)(2x + cy + d)$ 가 된다고 할 때, $a + b + c + d$ 의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수)

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 + xy - y^2 + 10x + 4y + 12 \quad (\leftarrow x \text{에 관하여 정리}) \\ &= 2x^2 + (y + 10)x - (y^2 - 4y - 12) \\ &= 2x^2 + (y + 10)x - (y + 2)(y - 6) \\ &= (x + (y + 2))(2x - (y - 6)) \\ &= (x + y + 2)(2x - y + 6) \\ &\therefore a = 1, b = 2, c = -1, d = 6 \\ &\therefore a + b + c + d = 8 \end{aligned}$$

17. $a + b + c = 0$ 일 때, $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 의 값을 구하면?

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$a + b + c = 0$ 이면 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 이다.

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \frac{a(b+c)}{bc} + \frac{b(a+c)}{ac} + \frac{c(a+b)}{ab} \\ &= \frac{a^2(-a) + b^2(-b) + c^2(-c)}{abc} \\ &= \frac{-(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} \\ &= \frac{-3abc}{abc} = -3 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} &a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \\ &= \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) \\ &= \frac{a+c}{b} + \frac{b+a}{c} + \frac{b+c}{a} \\ &= \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c} + \frac{-a}{a} \quad (\because a+b+c=0) \\ &= -3 \end{aligned}$$

18. 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ 을 이용하여 $\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10000

해설

9999 = a 라 하면

$$\begin{aligned}\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1} &= \frac{a^3 + 1}{(a - 1)a + 1} \\ &= \frac{(a + 1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1} \\ &= a + 1 = 10000\end{aligned}$$

19. 모든 모서리의 길이의 합이 60 이고, 대각선의 길이가 $\sqrt{77}$ 인 직육면체의 겉넓이는?

① 88 ② 100 ③ 124 ④ 148 ⑤ 160

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 x, y, z 라고 하면

$$4(x + y + z) = 60 \text{ 에서 } x + y + z = 15$$

또, 대각선의 길이는

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{77} \text{ 이므로}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 77$$

이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(xy + yz + zx)$ 이고

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \text{ 이므로}$$

$$77 = 15^2 - 2(xy + yz + zx)$$

$$\therefore 2(xy + yz + zx) = 225 - 77 = 148$$

따라서, 직육면체의 겉넓이는 148 이다.

20. $-a^2(b-c) - b^2(c-a) - c^2(a-b)$ 을 인수분해했을 때, 각 인수들의 합이 될 수 없는 것은?

- ① $a + b$
- ② $2a - 2b$
- ③ $2b - 2a$
- ④ $2b - 2c$
- ⑤ 0

해설

a 에 대한 내림차순으로 정리한다.
 $-a^2(b-c) - b^2(c-a) - c^2(a-b)$
 $= (c-b)a^2 - (c^2-b^2)a + bc^2 - b^2c$
 $= (c-b)a^2 - (c-b)(c+b)a + bc(c-b)$
 $= (c-b)\{a^2 - (c+b)a + bc\}$
 $= (c-b)(a-b)(a-c) \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
 $= (a-b)(b-c)(c-a) \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
 $= (b-c)(b-a)(a-c) \cdots \textcircled{\text{㉢}}$
 $= (c-a)(b-c)(b-a) \cdots \textcircled{\text{㉣}}$
㉠식 : 세항을 모두 더하면 $2a - 2b$
㉡식 : 세항을 모두 더하면 0
㉢식 : 세항을 모두 더하면 $2b - 2c$
㉣식 : 세항을 모두 더하면 $2b - 2a$

21. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ㉠

빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
- ㉡

빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
- ㉢

빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
- ㉤

$a = b$ 인 이등변삼각형
- ㉥

$b = c$ 인 이등변삼각형

- ① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
- ② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
- ③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
- ④ $a = b$ 인 이등변삼각형
- ⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

해설

$$\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$$
에서
$$(a-b+c)(a-b-c) = (a+b+c)(-a-b+c)$$
$$(a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) = 0$$
$$\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\} = 0$$
$$(a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2 = 0$$
$$a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2$$
$$= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2$$
$$= 2(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$
$$\therefore a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.