1. $x-y=1$을 만족하는 모든 실수 x, y에 대하여 등식 $3x^2-5x+1=ay^2+by+c$이 항상 성립할 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x=y+1$을 주어진 식에 대입한 후,
y에 대한 내림차순으로 정리한다.

$3(y+1)^2-5(y+1)+1=ay^2+by+c$

$(3-a)y^2+(1-b)y-1-c=0$

$\therefore a=3,\ b=1,\ c=-1$

$\therefore\ a+b+c=3$

2. 다항식 $(x-1)^3+27$을 바르게 인수분해한 것은?

① $(x-1)(x^2+3)$　　② $(x-1)(x^2-x-2)$

③ $(x-1)(x^2+3x+3)$　　④ $(x+2)(x^2+x+7)$

⑤ $(x+2)(x^2-5x+13)$

해설

$x-1$을 A로 치환하면

준 식 $=A^3+27=(A+3)(A^2-3A+9)$

다시 $x-1$을 대입하면 $(x+2)(x^2-5x+13)$

3. $x^3-6x^2+11x-6$을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$
② $(x-1)(x+2)(x+3)$
③ $(x-1)(x-2)(x-3)$
④ $(x+1)(x+2)(x-3)$
⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면
$f(1)=0,\ f(2)=0,\ f(3)=0$이므로
(준식)$=(x-1)(x-2)(x-3)$

4. x^3+x^2+2를 다항식 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 나머지를 $R(x)$라 할 때, $Q(x)+R(x)$의 값은?

① $2x-3$　　② $2x$　　③ $3x+2$

④ $4x$　　⑤ $4x+1$

해설

x^3+x^2+2를 x^2+2x-1로 직접 나누면

$Q(x)=x-1,\quad R(x)=3x+1$

$\therefore\ Q(x)+R(x)=4x$

5. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$의 전개식으로 옳은 것은?

① a^3+b^3 ② a^6+b^6 ③ a^6-b^6

④ a^9+b^9 ⑤ a^9-b^9

해설

(준 식)$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6$

6. 모든 모서리의 합이 36, 겉넓이가 56 인 직육면체의 대각선의 길이는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 $a,\ b,\ c$라 하자.

$4(a+b+c)=36,\ 2(ab+bc+ca)=56$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2=81-56=25$

$$\begin{aligned}\therefore\ (\text{대각선의 길이}) &= \sqrt{a^2+b^2+c^2}\\ &= \sqrt{25}=5\end{aligned}$$

7. $\dfrac{2x+3a}{4x+1}$가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a=2$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+1}=k$ (일정값 $=k$)라 놓으면 $2x+3a=k(4x+1)$에서

$(2-4k)x+3a-k=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로,

$2-4k=0,\ 3a-k=0$

$k=\dfrac{1}{2}$이므로 $3a=k$에서 $a=\dfrac{1}{6}$

$\therefore\ 12a=2$

8. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 $(x-1)^2$을 나누었을 때 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로

x^3+ax^2+bx+3

$=(x-1)^2(x+k)+2x+1$

$=x^3+(k-2)x^2+(3-2k)x+k+1$

양변의 계수를 비교하면

$a=k-2,\ b=3-2k,\ 3=k+1$

$k=2$이므로 $a=0,\ b=-1$

$\therefore\ a-b=0-(-1)=1$

9. $x^3 - x^2 + 2 = (x+1)^3 + a(x+1)^2 + b(x+1) + c$ 가 항등식일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

조립제법에 의한 방법으로 풀면

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\
 & & -1 & 2 & -2 \\
\hline
-1 & 1 & -2 & 2 & \boxed{0} \\
 & & -1 & 3 & \\
\hline
-1 & 1 & -3 & \boxed{5} & \\
 & & -1 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{-4} & &
\end{array}
$$

$\therefore\ a = -4,\ b = 5,\ c = 0$

$\therefore\ a + b + c = 1$

해설

주어진 식의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$2 = 1 + a + b + c$

$\therefore\ a + b + c = 1$

10. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이 때, $m+n$의 값은?

① $-\dfrac{19}{3}$ ② $-\dfrac{25}{6}$ ③ $-\dfrac{29}{6}$ ④ $-\dfrac{14}{3}$ ⑤ $-\dfrac{7}{2}$

해설

$f(x)=x^3+mx^2+nx+1$

$f(x)=(x+1)Q1(x)+5$으로 놓으면 $f(-1)=5$

$f(x)=(x-2)Q'(x)$으로 놓으면 $f(2)=0$

따라서, $f(-1)=-1+m-n+1=5$

$f(2)=8+4m+2n+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $m=\dfrac{1}{6},\quad n=-\dfrac{29}{6}$

$\therefore\ m+n=-\dfrac{28}{6}=-\dfrac{14}{3}$

11. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 2이고, $x+2$로 나눈 나머지가 5이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

나머지 정리에 의하여,

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$라 할 수 있다.

$f(1)=a+b=2$

$f(-2)=-2a+b=5$

연립하면, $a=-1 \quad b=3$

$\therefore R(x)=-x+3$

$\quad R(2)=1$

12. $f(x)$를 $x-1$로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x+1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q(x)+3 \\ &= (x-1)\{(x+3)Q'(x)+2\}+3 \\ &= (x-1)(x+3)Q'(x)+2(x-1)+3 \\ &= (x^2+2x-3)Q'(x)+2x+1 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

13. $2x^3+9x^2+11x+7=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 가 x에 대한 항등식일 때, $a,\ b,\ c, d$를 차례로 구하면?

① 3, -1, 3, 2
② 2, 3, -1, 3
③ -3, 1, -3, -2
④ -2, -3, 1, -3
⑤ 1, -3, 4, -2

해설

조립제법을 이용하면

$$
\begin{array}{r|rrrrll}
-1 & 2 & 9 & 11 & 7 & & \\
 & & -2 & -7 & -4 & & \\
\hline
-1 & 2 & 7 & 4 & \boxed{3} & \leftarrow & d \\
 & & -2 & -5 & & & \\
\hline
-1 & 2 & 5 & \boxed{-1} & \leftarrow & c & \\
 & & -2 & & & & \\
\hline
 & 2 & \boxed{3} & \leftarrow b & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & a & & & & &
\end{array}
$$

$a=2,\ b=3,\ c=-1,\ d=3$

14. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle ABC$에 대하여 $a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$인 관계가 성립할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$에서 $a^2-ab+b^2=ac+bc-c^2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

15. x^4-6x^2+1을 인수분해 하였더니 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$가 되었다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하면?

① -2 ② 2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 4

해설

$x^4-6x^2+1=(x^4-2x^2+1)-4x^2$

$=(x^2-1)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$

$=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

$\therefore\ a+b+c+d=-2$

16. $2x^2+xy-y^2+10x+4y+12$를 x, y의 두 일차식의 곱으로 인수분해하면, $(x+ay+b)(2x+cy+d)$가 된다고 할 때, $a+b+c+d$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$2x^2+xy-y^2+10x+4y+12$ (← x에 관하여 정리)

$=2x^2+(y+10)x-(y^2-4y-12)$

$=2x^2+(y+10)x-(y+2)(y-6)$

$=\{x+(y+2)\}\{2x-(y-6)\}$

$=(x+y+2)(2x-y+6)$

$\therefore\ a=1,\ b=2,\ c=-1,\ d=6$

$\therefore\ a+b+c+d=8$

17. $a+b+c=0$일 때, $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 값을 구하면?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

$a+b+c=0$이면 $a^3+b^3+c^3=3abc$이다.

$$(\text{준식})=\frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(a+c)}{ac}+\frac{c(a+b)}{ab}$$
$$=\frac{a^2(-a)+b^2(-b)+c^2(-c)}{abc}$$
$$=\frac{-\left(a^3+b^3+c^3\right)}{abc}$$
$$=\frac{-3abc}{abc}=-3$$

해설

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$
$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)$$
$$=\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}+\frac{b+c}{a}$$
$$=\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+\frac{-a}{a}\ (\because\ a+b+c=0)$$
$$=-3$$

18. 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$을 이용하여 $\dfrac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1}$을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10000

해설

$9999 = a$라 하면

$$\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1} = \frac{a^3 + 1}{(a - 1)a + 1}$$
$$= \frac{(a + 1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1}$$
$$= a + 1 = 10000$$

19. 모든 모서리의 길이의 합이 60이고, 대각선의 길이가 $\sqrt{77}$인 직육면체의 겉넓이는?

① 88 ② 100 ③ 124 ④ 148 ⑤ 160

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 x, y, z라고 하면

$4(x+y+z)=60$에서 $x+y+z=15$

또, 대각선의 길이는

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{77}$이므로

$x^2+y^2+z^2=77$

이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이고

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$이므로

$77=15^2-2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=225-77=148$

따라서, 직육면체의 겉넓이는 148이다.

20. $-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$ 을 인수분해했을 때, 각 인수들의 합이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $a+b$ ② $2a-2b$ ③ $2b-2a$

④ $2b-2c$ ⑤ 0

해설

a에 대한 내림차순으로 정리한다.

$$
\begin{aligned}
&-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)\\
&=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc^2-b^2c\\
&=(c-b)a^2-(c-b)(c+b)a+bc(c-b)\\
&=(c-b)\left\{a^2-(c+b)a+bc\right\}\\
&=(c-b)(a-b)(a-c)\cdots ㉠\\
&=(a-b)(b-c)(c-a)\cdots ㉡\\
&=(b-c)(b-a)(a-c)\cdots ㉢\\
&=(c-a)(b-c)(b-a)\cdots ㉣
\end{aligned}
$$

㉠식 : 세항을 모두 더하면 $2a-2b$

㉡식 : 세항을 모두 더하면 0

㉢식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2c$

㉣식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2a$

21. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

㉠ 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
㉡ 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
㉢ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
㉣ $a=b$ 인 이등변삼각형
㉤ $b=c$ 인 이등변삼각형

① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형

④ $a=b$ 인 이등변삼각형

⑤ $b=c$ 인 이등변삼각형

해설

$\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$ 에서

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c)+(a+b+c)(a+b-c)=0$

$\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}+\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}=0$

$(a-b)^2-c^2+(a+b)^2-c^2=0$

$a^2-2ab+b^2-c^2+a^2+2ab+b^2-c^2$

$=2a^2+2b^2-2c^2$

$=2(a^2+b^2-c^2)=0$

$\therefore a^2+b^2-c^2=0$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.