

1. x 의 값에 관계없이 등식 $x^2 + 13x - 18 = a(x+2)(x-3) + bx(x+2) + cx(x-3)$ 이 항상 성립할 때, 상수 a, b, c 의 합 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

해설

준식에

$x = 0$ 을 대입하면 $-18 = -6a$ 에서 $a = 3$

$x = 3$ 을 대입하면 $30 = 15b$ 에서 $b = 2$

$x = -2$ 을 대입하면 $-40 = 10c$ 에서 $c = -4$

$\therefore a + b + c = 3 + 2 + (-4) = 1$

2. 복소수 $\frac{2+3i}{1-i}$ 를 $a+bi$ 꼴로 나타낼 때, $a+b$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$\frac{2+3i}{1-i} = \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+5i}{2}$$

$$\therefore a+b = \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} = 2$$

3. $x = 1 - \sqrt{3}i$ 일 때, $x^2 - 2x + 1$ 의 값은?

- ① -3 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x = 1 - \sqrt{3}i$ 에서
 $x - 1 = -\sqrt{3}i$ 의 양변을 제곱하면
 $(x - 1)^2 = (-\sqrt{3}i)^2$
 $x^2 - 2x = -4$ 이므로
 $x^2 - 2x + 1 = -4 + 1 = -3$

4. 두 다항식 A, B 에 대하여 연산 $A \ominus B$ 와 $A \otimes B$ 을 다음과 같이 정의하기로 한다.
- $A \ominus B = A - 3B, A \otimes B = (A + B)B$
 $P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3, Q = x^3 + x^2y + xy^2$ 이라 할 때,
 $(P \ominus Q) \otimes Q$ 를 x, y 에 관한 다항식으로 나타내면?
- ① $x^4y^2 + xy^5$ ② $x^4y^2 - xy^5$ ③ $x^3y^2 - xy^4$
④ $x^3y^2 + xy^4$ ⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$ 를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \cdots \text{①}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P - 2Q &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

5. 다항식 $f(x)$ 를 $2x^2 + 3x + 2$ 로 나누었더니 몫이 $3x - 4$ 이고, 나머지가 $2x + 5$ 이었다. 이 때, $f(1)$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 + 3x + 2)(3x - 4) + (2x + 5) \\ &= 6x^3 + 9x^2 + 6x - 8x^2 - 12x - 8 + 2x + 5 \\ &= 6x^3 + x^2 - 4x - 3 \\ \therefore f(1) &= 6 + 1 - 4 - 3 = 0 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 + 3x + 2)(3x - 4) + (2x + 5) \\ f(1) &= (2 + 3 + 2)(3 - 4) + (2 + 5) = -7 + 7 = 0 \end{aligned}$$

6. 다항식 $f(x)$ 를 두 일차식 $x-1$, $x-2$ 로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$

② $-x+3$

③ $x-3$

④ $-x-3$

⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$ 를 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지는 각각 2, 1이므로
 $f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$ 라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x) + ax + b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$ 를 대입하면

$$f(1) = a + b = 2, \quad f(2) = 2a + b = 1$$

두 식을 연립하여 구하면 $a = -1, b = 3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x+3$

7. x^3 의 항의 계수가 1인 삼차 다항식 $P(x)$ 가 $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ 을 만족할 때, $P(4)$ 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

인수정리에 의해

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$P(4) = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

8. $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \cdots + \frac{1}{i^{50}}$ 의 값은?

① $-1+i$

② $-1-i$

③ 0

④ $1+i$

⑤ $1-i$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \cdots + \frac{1}{i^{50}} \\ & \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} \right) + \left(\frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^8} \right) + \cdots \\ & + \left(\frac{1}{i^{45}} + \frac{1}{i^{46}} + \frac{1}{i^{47}} + \frac{1}{i^{48}} \right) + \frac{1}{i^{49}} + \frac{1}{i^{50}} \\ & = \left(\frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 \right) + \left(\frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 \right) + \cdots \\ & + \left(\frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 \right) + \frac{1}{i} - 1 \\ & = \frac{1}{i} - 1 = -i - 1 \end{aligned}$$

9. $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 일 때, $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ 에 대입하면

$$ab + bc + ca = -\frac{1}{2}$$

$$(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)$$

$$\frac{1}{4} = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)$$

$$\text{따라서 } a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{4}$$

10. 다항식 $x^3 - 4x^2 + ax + b$ 가 $x^2 + 2$ 로 나누어 떨어질 때, $3a + b$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 4x^2 + ax + b \\ &= (x^2 + 2)(x - \alpha) \text{라 놓을 수 있다.} \\ x^3 - \alpha x^2 + 2x - 2\alpha &= x^3 - 4x^2 + ax + b \\ \therefore \alpha &= 4, \quad a = 2, \quad b = -8 \\ \therefore 3a + b &= -2 \end{aligned}$$

11. 이차항의 계수가 1 인 두 다항식 A, B 의 최대공약수가 $x-1$, 최소공배수가 x^3-3x+2 일 때, $A+B$ 는?

- ① $2x^2-x-1$ ② $2x^2+x+1$ ③ $2x^2-2x-1$
④ $2x^2-2x+1$ ⑤ $2x^2-2x+3$

해설

$$G = x-1, L = (x-1)^2(x+2)$$

$$A = (x-1)^2 = x^2-2x+1, B = (x-1)(x+2) = x^2+x-2$$

$$A+B = 2x^2-x-1$$

12. α, β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

- $\textcircled{\tiny \neg}$ $\alpha = \bar{\beta}$ 이면, $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

$\textcircled{\tiny \cup}$ $\alpha = \bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

$\textcircled{\tiny \ominus}$ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.

$\textcircled{\tiny \oplus}$ $\alpha + \beta i = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.

- ① $\textcircled{\tiny \cup}, \textcircled{\tiny \ominus}$

② $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \cup}, \textcircled{\tiny \ominus}$

③ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \cup}, \textcircled{\tiny \oplus}$

④ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \cup}$

⑤ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \cup}, \textcircled{\tiny \ominus}, \textcircled{\tiny \oplus}$
- 해설

$\alpha = a + bi, \beta = a - bi$ (a, b 는 실수)
 $\textcircled{\tiny \neg} \alpha + \beta = 2a, \alpha\beta = a^2 + b^2$
 $\textcircled{\tiny \cup} \alpha\beta = 0, a^2 + b^2 = 0, a = 0, b = 0$
 $\textcircled{\tiny \ominus}$ (반례) $\alpha = 1, \beta = i$
 $\textcircled{\tiny \oplus}$ (반례) $\alpha = 1, \beta = i$

13. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$ 의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① $a = b$ 인 이등변삼각형 ② $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형
③ $b = c$ 인 이등변삼각형 ④ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형
⑤ 정삼각형

해설

$$\begin{aligned} a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 &= 0 \\ a^2(a+b) + b^2(a+b) - c^2(a+b) &= 0 \\ (a+b)(a^2 + b^2 - c^2) &= 0 \\ a = -b \quad \text{또는} \quad c^2 &= a^2 + b^2 \\ a, b, c \text{ 모두 양수이므로, } c^2 &= a^2 + b^2 \\ \therefore \angle C &= 90^\circ \text{인 직각삼각형} \end{aligned}$$

14. $x^4 + 4y^4 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)$ 을 이용하여 다음 식의 값을 구하면?

$$\frac{(11^4 + 324)(23^4 + 324)(35^4 + 324)(47^4 + 324)}{(5^4 + 324)(17^4 + 324)(29^4 + 324)(41^4 + 324)}$$

- ① 192 ② 193 ③ 194 ④ 195 ⑤ 196

해설

$$\begin{aligned} x^4 + 4y^4 &= (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2) \\ &= \{(x - y)^2 + y^2\}\{(x + y)^2 + y^2\} \text{ 이고,} \\ 324 &= 4 \times 3^4 \text{ 이므로} \\ 11^4 + 324 &= (11^2 - 2 \times 11 \times 3 + 2 \times 3^2)(11^2 + 2 \times 11 \times 3 + 2 \times 3^2) \\ &= \{(11 - 3)^2 + 3^2\}\{(11 + 3)^2 + 3^2\} \\ &= (8^2 + 3^2)(14^2 + 3^2) \end{aligned}$$

따라서 차례대로 모두 정리해 보면 주어진 식은

$$\begin{aligned} &\frac{\{(8^2 + 3^2)(14^2 + 3^2)\}\{(20^2 + 3^2)(26^2 + 3^2)\}}{\{(2^2 + 3^2)(8^2 + 3^2)\}\{(14^2 + 3^2)(20^2 + 3^2)\}} \\ &\frac{\{(32^2 + 3^2)(38^2 + 3^2)\}\{(44^2 + 3^2)(50^2 + 3^2)\}}{\{(26^2 + 3^2)(32^2 + 3^2)\}\{(38^2 + 3^2)(44^2 + 3^2)\}} \\ &= \frac{50^2 + 3^2}{2^2 + 3^2} = \frac{2509}{13} = 193 \end{aligned}$$

15. 두 다항식 $2x^2 + px + q$, $4x^2 + rx + s$ 의 최대공약수가 $2x + 1$ 이고 곱이 $8x^4 + 4x^3 - 62x^2 - 61x - 15$ 일 때, $p + q + r + s$ 의 합은?

- ① 1
- ② 3
- ③ 5
- ④ 7
- ⑤ 9

해설

두 다항식을 $A = aG$, $B = bG$ (a , b 는 서로소)라고 하면
 $AB = abG^2$ 이므로

$$8x^4 + 4x^3 - 62x^2 - 61x - 15 = ab(2x + 1)^2$$

$$\therefore 8x^4 + 4x^3 - 62x^2 - 61x - 15$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 (8x^2 - 4x - 60)$$

$$= (2x + 1)^2 (2x^2 - x - 15)$$

$$= (2x + 1)^2 (x - 3)(2x + 5)$$

$$\therefore 2x^2 + px + q = (2x + 1)(x - 3) = 2x^2 - 5x - 3,$$

$$4x^2 + rx + s = (2x + 1)(2x + 5) = 4x^2 + 12x + 5 \text{ 이므로}$$

$$p = -5, \quad q = -3, \quad r = 12, \quad s = 5$$

$$\therefore p + q + r + s = 9$$