1. x 의 값에 관계없이 등식 $x^2+13x-18=a(x+2)(x-3)+bx(x+2)+cx(x-3)$ 이 항상 성립할 때, 상수 a,b,c 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

해설

준식에
$x=0$을 대입하면 $-18=-6a$에서 $a=3$
$x=3$을 대입하면 $30=15b$에서 $b=2$
$x=-2$을 대입하면 $-40=10c$에서 $c=-4$
$\therefore\ a+b+c=3+2+(-4)=1$

2. 복소수 $\dfrac{2+3i}{1-i}$ 를 $a+bi$ 꼴로 나타낼 때, $a+b$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\frac{2+3i}{1-i}=\frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-1+5i}{2}$$

$$\therefore\ a+b=\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}=2$$

3. $x = 1 - \sqrt{3}i$ 일 때, $x^2 - 2x + 1$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x = 1 - \sqrt{3}i$ 에서
$x - 1 = -\sqrt{3}i$ 의 양변을 제곱하면
$(x-1)^2 = (-\sqrt{3}i)^2$
$x^2 - 2x = -4$ 이므로
$x^2 - 2x + 1 = -4 + 1 = -3$

4. 두 다항식 $A,\ B$에 대하여 연산 $A \ominus B$와 $A \otimes B$을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$A \ominus B = A - 3B,\ A \otimes B = (A+B)B$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3,\ Q = x^3 + x^2y + xy^2$이라 할 때, $(P \ominus Q) \otimes Q$를 x, y에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$　　② $x^4y^2 - xy^5$　　③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$　　⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \cdots \text{①}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P - 2Q \\ &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

5. 다항식 $f(x)$를 $2x^2+3x+2$로 나누었더니 몫이 $3x-4$이고, 나머지가 $2x+5$이었다. 이 때, $f(1)$의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 3　　⑤ 5

해설

$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$
$=6x^3+9x^2+6x-8x^2-12x-8+2x+5$
$=6x^3+x^2-4x-3$
$\therefore\ f(1)=6+1-4-3=0$

해설

$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$
$f(1)=(2+3+2)(3-4)+(2+5)=-7+7=0$

6. 다항식 $f(x)$를 두 일차식 $x-1$, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$　② $-x+3$　③ $x-3$

④ $-x-3$　⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 각각 $2, 1$이므로

$f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$를 대입하면

$f(1)=a+b=2$, $f(2)=2a+b=1$

두 식을 연립하여 구하면 $a=-1, b=3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x+3$

7. x^3 의 항의 계수가 1 인 삼차 다항식 $P(x)$ 가 $P(1)=P(2)=P(3)=0$ 을 만족할 때, $P(4)$ 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

인수정리에 의해

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

$P(4)=3\times2\times1=6$

8. $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\cdots+\dfrac{1}{i^{50}}$ 의 값은?

① $-1+i$　　② $-1-i$　　③ 0

④ $1+i$　　⑤ $1-i$

해설

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{50}}$$

$$\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\left(\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{i^{45}}+\frac{1}{i^{46}}+\frac{1}{i^{47}}+\frac{1}{i^{48}}\right)+\frac{1}{i^{49}}+\frac{1}{i^{50}}$$

$$=\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\frac{1}{i}-1$$

$$=\frac{1}{i}-1=-i-1$$

9. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 0　④ 1　⑤ 4

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에 대입하면

$$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$$

$$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$$

$$\frac{1}{4}=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$$

따라서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$

10. 다항식 $x^3 - 4x^2 + ax + b$가 $x^2 + 2$로 나누어 떨어질 때, $3a + b$의 값은?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + ax + b$

$\quad = (x^2 + 2)(x - \alpha)$ 라 놓을 수 있다.

$x^3 - \alpha x^2 + 2x - 2\alpha = x^3 - 4x^2 + ax + b$

$\therefore\ \alpha = 4,\quad a = 2,\quad b = -8$

$\therefore\ 3a + b = -2$

11. 이차항의 계수가 1 인 두 다항식 A, B 의 최대공약수가 $x-1$, 최소공배수가 x^3-3x+2 일 때, $A+B$ 는?

① $2x^2-x-1$ ② $2x^2+x+1$ ③ $2x^2-2x-1$
④ $2x^2-2x+1$ ⑤ $2x^2-2x+3$

해설

$G=x-1,\ L=(x-1)^2(x+2)$
$A=(x-1)^2=x^2-2x+1,\ B=(x-1)(x+2)=x^2+x-2$
$A+B=2x^2-x-1$

12. α, β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

ㄱ $\alpha = \overline{\beta}$ 이면, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

ㄴ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

ㄷ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.

ㄹ $\alpha + \beta i = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.

① ㄴ,ㄷ
② ㄱ,ㄴ,ㄷ
③ ㄱ,ㄴ,ㄹ
④ ㄱ,ㄴ
⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ

해설

$\alpha = a + bi,\ \beta = a - bi$ ($a,\ b$ 는 실수)
ㄱ $\alpha + \beta = 2a,\ \alpha\beta = a^2 + b^2$
ㄴ $\alpha\beta = 0$, $a^2 + b^2 = 0$, $a = 0,\ b = 0$
ㄷ (반례) $\alpha = 1,\ \beta = i$
ㄹ (반례) $\alpha = 1,\ \beta = i$

13. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$ 의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a=b$ 인 이등변삼각형

② $\angle \mathrm{A}=90°$ 인 직각삼각형

③ $b=c$ 인 이등변삼각형

④ $\angle \mathrm{C}=90°$ 인 직각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$

$a^2(a+b)+b^2(a+b)-c^2(a+b)=0$

$(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$

$a=-b$ 또는 $c^2=a^2+b^2$

a, b, c 모두 양수이므로, $c^2=a^2+b^2$

$\therefore \angle \mathrm{C}=90°$ 인 직각삼각형

14. $x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$을 이용하여 다음 식의 값을 구하면?

$$\frac{(11^4+324)(23^4+324)(35^4+324)(47^4+324)}{(5^4+324)(17^4+324)(29^4+324)(41^4+324)}$$

① 192 ② 193 ③ 194 ④ 195 ⑤ 196

해설

$x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$

$=\{(x-y)^2+y^2\}\{(x+y)^2+y^2\}$ 이고,

$324=4\times3^4$ 이므로

$11^4+324=(11^2-2\times11\times3+2\times3^2)(11^2+2\times11\times3+2\times3^2)$

$=\{(11-3)^2+3^2\}\{(11+3)^2+3^2\}$

$=(8^2+3^2)(14^2+3^2)$

따라서 차례대로 모두 정리해 보면 주어진 식은

$$\frac{\{(8^2+3^2)(14^2+3^2)\}\{(20^2+3^2)(26^2+3^2)\}}{\{(2^2+3^2)(8^2+3^2)\}\{(14^2+3^2)(20^2+3^2)\}}$$

$$\frac{\{(32^2+3^2)(38^2+3^2)\}\{(44^2+3^2)(50^2+3^2)\}}{\{(26^2+3^2)(32^2+3^2)\}\{(38^2+3^2)(44^2+3^2)\}}$$

$$=\frac{50^2+3^2}{2^2+3^2}=\frac{2509}{13}=193$$

15. 두 다항식 $2x^2+px+q$, $4x^2+rx+s$의 최대공약수가 $2x+1$이고 곱이 $8x^4+4x^3-62x^2-61x-15$일 때, $p+q+r+s$의 합은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

두 다항식을 $A=aG$, $B=bG$ (a, b는 서로소)라고 하면

$AB=abG^2$이므로

$8x^4+4x^3-62x^2-61x-15=ab(2x+1)^2$

$\therefore\ 8x^4+4x^2-62x^2-61x-15$

$=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2(8x^2-4x-60)$

$=(2x+1)^2(2x^2-x-15)$

$=(2x+1)^2(x-3)(2x+5)$

즉, $2x^2+px+q=(2x+1)(x-3)=2x^2-5x-3$,

$4x^2+rx+s=(2x+1)(2x+5)=4x^2+12x+5$이므로

$p=-5,\ q=-3,\ r=12,\ s=5$

$\therefore\ p+q+r+s=9$