

1. $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right)\left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$ 을 간단히 하면?

- ① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

해설

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right)\left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$$

$$= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdots \frac{8 \cdot 10}{9^2} \cdot \frac{9 \cdot 11}{10^2}$$

$$= \frac{1 \cdot 11}{2 \cdot 10} = \frac{11}{20}$$

일반적으로

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

2. $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{2}{(a+1)(a+3)} + \frac{3}{(a+3)(a+6)}$ 을 간단히 한 것은 ?

① $\frac{1}{a} + \frac{6}{a+6}$

② $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+6}$

③ $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+6}$

④ $\frac{1}{a} - \frac{6}{a+6}$

⑤ $\frac{2}{a} - \frac{1}{a+6}$

해설

(준식)

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+3} - \frac{1}{a+6}$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+6}$$

3. $\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$ 을 만족할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} \\ &= \frac{(a+b)x + 2a + b}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

$$a+b=1, 2a+b=3$$

$$\therefore a=2, b=-1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$$

4. 분수식

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{3}{(x+3)(x+6)} \\ + \frac{4}{(x+6)(x+10)} + \frac{5}{(x+10)(x+15)} \\ + \frac{6}{(x+15)(x+21)} + \frac{7}{(x+21)(x+28)} \text{을 간단히 하면?}$$

- ① $\frac{28}{x^2+28x}$
- ② $\frac{7}{x^2+28x}$
- ③ $\frac{7}{x^2+21x}$
- ④ $\frac{6}{x^2+21x}$
- ⑤ $\frac{1}{x^2+21x}$

해설

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{x+21} - \frac{1}{x+28}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+28} = \frac{28}{x^2+28x} \end{aligned}$$

5. $\frac{1 + \frac{1}{x-1}}{1 - \frac{1}{x+1}} = a + \frac{b}{x-1}$ 이라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

좌변을 정리하여 우변과 비교한다.

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{1}{x-1}}{1 - \frac{1}{x+1}} &= \frac{\frac{x-1+1}{x-1}}{\frac{x+1-1}{x+1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x+1}} \\ &= \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$$

$$a + \frac{b}{x-1} = \frac{ax - a + b}{x-1}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{ax - a + b}{x-1}$$

$$\therefore a = 1, b = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$$

6. $\frac{3x-2y}{x} = \frac{3x-4y}{y}$ 일 때, $\frac{x}{y}$ 의 값을 구하면? (단, $x > y > 0$)

① -1

② 1

③ 2

④ -2

⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$$(3x-2y)y = x(3x-4y)$$

$$3x^2 - 7xy + 2y^2 = 0,$$

$$(3x-y)(x-2y) = 0$$

$$x > y > 0 \text{ 이므로 } x = 2y$$

$$\therefore \frac{x}{y} = 2$$

7. $\frac{-a+b+c}{a} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{a+b-c}{c}$ 일 때 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ 의 값은? (단, $a+b+c \neq 0$)

- ① 8 ② 6 ③ 4 ④ 2 ⑤ 0

해설

$$\frac{-a+b+c}{a} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{a+b-c}{c}$$

$$= \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

$$a+b+c \neq 0 \text{ 이므로, } \frac{-a+b+c}{a} = 1$$

$$\therefore b+c = 2a$$

$$\text{같은 방법으로 } a+c = 2b, a+b = 2c$$

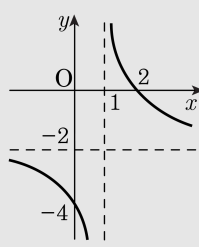
$$\therefore \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{8abc}{abc} = 8$$

8. $y = \frac{2}{x-1} - 2$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축으로 -1 , y 축으로 -2 만큼 평행이동한 그래프이다.
- ② 치역은 $\mathbb{R} - \{-2\}$ 이다.
- ③ 제 2사분면을 지나지 않는다.
- ④ 점근선은 $x = 1$, $y = -2$ 이다.
- ⑤ 정의역은 $\mathbb{R} - \{1\}$ 이다.

해설

$y = \frac{2}{x-1} - 2$ 의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 1만큼, y 축 방향으로 -2 만큼 평행이동시킨 그래프로 다음 그림과 같다.
따라서 옳지 않은 것은 ①이다.



9. 함수 $y = \frac{ax+1}{-x+b}$ 의 그래프의 점근선이 $x=2, y=-1$ 일 때, 상수 $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = \frac{ax+1}{-(x-b)}$ 의 점근선이 $x=2, y=-1$ 이므로

$b=2$ 이고

$y = \frac{a(x-2)+2a+1}{-(x-2)} = \frac{2a+1}{-(x-2)} - a$ 에서

$-a = -1$ 이므로

$\therefore a+b = 1+2 = 3$

10. 분수함수 $y = \frac{x-1}{x-2}$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ 제 1, 3 사분면만을 지난다.

㉡ 두 점근선의 교점은 (2, 1)이다.

㉢ 두 직선 $y = -x + 3$, $y = x - 1$ 에 대해 대칭인 곡선이다.

- ① ㉡

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

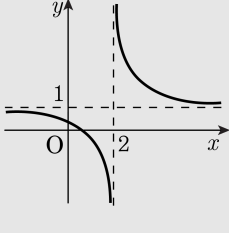
⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 다음 그림의 개형을 가지므로 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.

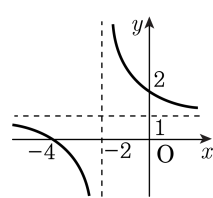
㉡ 점근선이 $x = 2$, $y = 1$ 이므로 교점은 (2, 1)

㉢ 주어진 분수함수가 $y = \frac{1}{x}$ 을 x 축으로 2, y 축으로 1만큼 평행이동 시킨 것이므로 대칭되는 직선은 기울기가 ± 1 이고 (2, 1)을 지나는 직선이다.
 $\Rightarrow y = x - 1, y = -x + 3$



11. 함수 $y = \frac{c-x}{ax+b}$ 의 그래프가 그림과 같을 때,
 $a+b+c$ 의 값은?

- ① -1 ② -2 ③ -4
 ④ -7 ⑤ 0



해설

점근선이 $x = -2$, $y = 1$ 이므로

$$y = \frac{k}{x+2} + 1 \dots\dots ①$$

①이 $(0, 2)$ 를 지나므로 대입하면 $k = 2$

$$y = \frac{2}{x+2} + 1 = \frac{-x-4}{-x-2}$$

$$\therefore a = -1, b = -2, c = -4$$

12. 유리함수 $f(x) = \frac{kx}{x+3}$ 의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭일 때, 실수 k 의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f(x) = \frac{kx}{x+3}$ 가 직선 $y = x$ 에 대해 대칭이므로

$$f(x) = f^{-1}(x), f^{-1}(x) = \frac{-3x}{x-k}$$

$$\frac{kx}{x+3} = \frac{-3x}{x-k}$$

$$\therefore k = -3$$

13. 함수 $f_1(x) = \frac{2x+3}{-x-1}$ 에 대하여 $f_{n+1} = f_1 \circ f_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이라 할 때, $f_{100}(1)$ 의 값은?

- ① -1
- ② $-\frac{5}{2}$
- ③ $-\frac{4}{3}$
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$$f_1(x) = \frac{2x+3}{-x-1} \text{ 에서 } f_1(1) = -\frac{5}{2}$$
$$f_2(1) = (f_1 \circ f_1)(1) = f_1\left(-\frac{5}{2}\right)$$
$$= \frac{-\frac{10}{2}+3}{\frac{5}{2}-1} = -\frac{4}{3}$$
$$f_3(1) = (f_1 \circ f_2)(1) = f_1\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{-\frac{8}{3}+3}{\frac{4}{3}-1} = 1$$
$$f_4(1) = (f_1 \circ f_3)(1) = f_1(1) = -\frac{5}{2}$$
$$\therefore f_4 = f_1, f_5 = f_2, f_6 = f_3, \dots$$
$$\therefore f_{3n+1} = f_1, f_{3n+2} = f_2, f_{3n} = f_3$$
$$100 = 3 \times 33 + 1 \text{ 이므로}$$
$$\therefore f_{100}(1) = f_1(1) = -\frac{5}{2}$$

14. $x^2 - x - 6 \geq 0$ 일 때, 함수 $y = \frac{x+2}{x-2}$ 의

최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다.

이때, $M + m$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x^2 - x - 6 \geq 0$ 에서

$$(x+2)(x-3) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 3$$

$$y = \frac{x+2}{x-2} = \frac{(x-2)+4}{x-2}$$

$$= \frac{4}{x-2} + 1$$

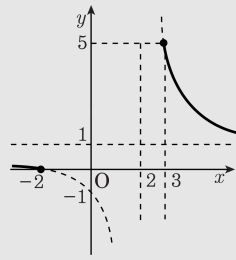
즉, $x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$ 에서

$y = \frac{x+2}{x-2}$ 의 그래프는 다음 그림과

같으므로 $x = -2$ 일 때, 최솟값 0,

$x = 3$ 일 때, 최댓값 5

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.



15. 두 함수 $f(x) = 2x - 1, g(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$ 에 대하여 $(f^{-1} \circ g)(2)$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 7

해설

$$(f^{-1} \circ g)(2) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(7)$$

$$f^{-1}(7) = k \text{ 라 하면 } f(k) = 7$$

$$\text{따라서 } 2k - 1 = 7$$

$$\therefore k = 4$$

16. 유리함수 $y = \frac{bx+c}{x-a}$ 의 그래프가 점 $(2,7)$ 을 지나고 이 함수의 역함수가 $y = \frac{x+c}{x-3}$ 일 때, a, b, c 의 곱 abc 를 구하면?

① -27 ② -9 ③ -3 ④ 3 ⑤ 9

해설

점 $(2,7)$ 을 지나면 역함수는 $(7,2)$ 를 지난다.

$$2 = \frac{7+c}{7-3} \text{ 에서 } c = 1$$

이제 원래 함수를 구해보면 $y = \frac{x+1}{x-3}$ 에서

$$\Rightarrow x = \frac{y+1}{y-3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3x+1}{x-1} \dots\dots \text{역함수}$$

$$\therefore a = 1, b = 3, c = 1$$

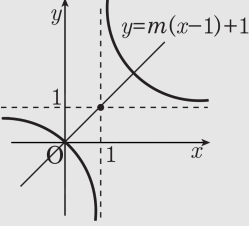
$$\therefore abc = 3$$

17. 두 함수 $y = \frac{1}{x-1} + 1$, $y = m(x-1) + 1$ 의 그래프가 만날 때, 다음 중 m 의 값이 될 수 있는 것을 고르면?

- ① -3
- ② -2
- ③ -1
- ④ 0
- ⑤ 1

해설

분수함수 $y = \frac{1}{x-1} + 1$ 의 그래프는
점근선이 $x = 1$, $y = 1$ 이고,
점 $(0, 0)$ 을 지난다.
 $y = m(x-1) + 1$ 의 그래프는 점 $(1, 1)$ 을
지나는 직선이므로 두 함수가 만나기 위한
실수 m 의 값의 범위는
다음 그림에서 $m > 0$ 이다.
따라서, 보기 중 m 의 값이 될 수 있는 것은
⑤이다.



18. $\frac{x+2y}{3} = \frac{3y+z}{4} = \frac{z}{2} = \frac{2x+10y-2z}{A}$ 일 때, A 의 값은 ?

① 9

② 7

③ 6

④ 8

⑤ 5

해설

가비의 리에 의해서

$$\begin{aligned}\text{준식} &= \frac{2(x+2y) + 2 \cdot (3y+z) - 4z}{2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 4 \cdot 2} \\ &= \frac{2x+10y-2z}{6}\end{aligned}$$

$$\therefore A = 6$$

19. $x = \frac{a}{b}$, $a \neq b$, $b \neq 0$ 일 때, $\frac{a+b}{a-b}$ 는?

- ① $\frac{x}{x+1}$ ② $\frac{x+1}{x-1}$ ③ 1 ④ $x - \frac{1}{x}$ ⑤ $x + \frac{1}{x}$

해설

$$a = bx \text{ 이므로 } \frac{a+b}{a-b} = \frac{bx+b}{bx-b} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{또는 } \frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

20. $\frac{x^3-x}{x^2-x} + \frac{x^4-1}{x^2-1} - \frac{x^2-2x-3}{x+1} \times \frac{x+2}{x^2-x-6}$ 을 계산하면?

- ① x^2+x+1 ② $\frac{x^2+1}{x-1}$ ③ $\frac{2x}{x^2-1}$
④ x^2-1 ⑤ $\frac{2x-1}{x^2-x}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1} \\ & - \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} \times \frac{x+2}{(x-3)(x+2)} \\ & = x+1+x^2+1-1 = x^2+x+1 \end{aligned}$$