1. 두 점 $\mathrm{A}(9,-4)$, $\mathrm{B}(2,a)$ 에서 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $m:(m-1)$ 로 내분하는 점이 $(5,4)$ 일 때, $a-m$ 의 값은?

① 4　② -2　③ 6　④ 3　⑤ -3

해설

두 점 $\mathrm{A}(9,-4)$, $\mathrm{B}(2,a)$ 에서 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $m:(m-1)$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2m+(m-1)9}{m+(m-1)}, \frac{ma+(m-1)(-4)}{m+(m-1)}\right)=(5,\ 4)$$ 이므로

$m=4,\ a=10 \quad \therefore \quad a-m=6$

2. 다음은 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$의 무게중심 G의 좌표가 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$임을 보인 것이다. (　　　) 안에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것은?

> 선분 BC의 중점을 $M(x', y')$이라 하면,
> $x' = (㉠)$, $y' = \frac{y_2+y_3}{2}$
> 무게 중심 $G(x, y)$는 선분 AM을 (㉡)로 내분하는 점이므로
> $x = \frac{2 \times x' + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_2+x_3+x_1}{3}$
> 같은 방법으로 $y = \frac{y_2+y_3+y_1}{3}$
> $\therefore$ $G = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

① $x_2 + x_3$, $2:1$　② $x_2 + x_3$, $3:1$　③ $\frac{x_2+x_3}{2}$, $1:1$
④ $\frac{x_2+x_3}{2}$, $3:1$　⑤ $\frac{x_2+x_3}{2}$, $2:1$

해설

$\overline{BC}$의 중점 $M(x', y')$은

$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$ 이므로

$x' = \frac{x_2+x_3}{2}$, $y' = \frac{y_2+y_3}{2}$ 이고

무게중심 $G(x, y)$는 선분 $\overline{AM}$을

$2:1$로 내분하는 점이므로

$$x = \frac{2 \times x' + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$ 이고

$$y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

3. 기울기가 2 이고 점 $(-3,\ 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = 2x - 3$ ② $y = 2x + 3$ ③ $y = 2x - 7$
④ $y = 2x + 7$ ⑤ $y = 2x + 9$

해설
$y - 1 = 2\{x - (-3)\}$
$\therefore\ y = 2x + 7$

4. 점 $\left(1,\ -\sqrt{3}\right)$을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60°인 직선의 방정식은?

① $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$　　② $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$
③ $y=x-\sqrt{3}$　　④ $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$
⑤ $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$

해설

기울기가 $\tan 60^{\circ}=\sqrt{3}$이고,
점 $\left(1,\ -\sqrt{3}\right)$을 지나므로
$y-(-\sqrt{3})=\sqrt{3}(x-1)$
$\therefore y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$

5. 두 점 A $(-3,\ 6)$, B $(2,\ -3)$을 잇는 선분 AB가 x축과 만나는 교점을 P라 할 때, 점 P의 좌표는?

① P $(1,\ 0)$ ② P $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ ③ P $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$
④ P $\left(-\frac{1}{3},\ 0\right)$ ⑤ P $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$

해설

$y-6=\frac{-3-6}{2-(-3)}(x+3)$, $y=-\frac{9}{5}x+\frac{3}{5}$

$\therefore y=0$ 일 때

$x=\frac{1}{3}$ 이므로 P $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$

6. 두 점 A$(1,\ -4)$, B$(3,\ 2)$를 지나는 직선과 수직인 직선의 기울기는?

① -3　② $-\frac{1}{3}$　③ -1　④ $\frac{1}{3}$　⑤ 3

해설

직선 AB의 기울기는 $\frac{2-(-4)}{3-1}=3$이므로
수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

7. 두 직선 $ax-y+3=0$, $4x+2y+(1-b)=0$이 일치할 때, ab의 값은?

① -14 ② -7 ③ 1 ④ 7 ⑤ 14

해설

두 직선 $ax-y+3=0$, $4x+2y+(1-b)=0$이 일치하려면

$\frac{a}{4}=\frac{-1}{2}=\frac{3}{1-b}$

$\therefore a=-2, b=7$

$\therefore ab=(-2)\cdot 7=-14$

8. 점 $(2,\ 1)$에서 직선 $y=x+1$에 이르는 거리는?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\sqrt{2}$　④ 2　⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$y=x+1$은 $x-y+1=0$이다.

점$(2,\ 1)$에서 $x-y+1=0$에 이르는 거리는

$\frac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

9. 직선 $y = 2x + 1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 직선의 y 절편은?

① -4 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선 $y = 2x + 1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$y + 1 = 2(x - 2) + 1$,

$y = 2x - 4$

따라서 구하는 직선의 y 절편은 -4 이다.

10. $3\overline{\mathrm{PA}} = 2\overline{\mathrm{PB}}$가 되도록 하는 선분 AB 위의 점 P에 대하여 $\mathrm{A}(-3, 2)$이고, $\mathrm{P}(1, 0)$일 때, 점 B의 x좌표와 y좌표의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$3\overline{\mathrm{PA}} = 2\overline{\mathrm{PB}}$이므로
$\overline{\mathrm{PA}} : \overline{\mathrm{PB}} = 2 : 3$이고,
점 P가 선분 AB 위의 점이므로
점 P는 선분 AB를 $2 : 3$으로 내분하는 점이다.
이 때, 점 B의 좌표를 $\mathrm{B}(a, b)$라 하면

$$\left(\frac{2 \times a + 3 \times (-3)}{2+3}, \frac{2 \times b + 3 \times 2}{2+3}\right) = (1, 0)$$

$$\frac{2a-9}{5} = 1, \frac{2b+6}{5} = 0$$

$\therefore\ a = 7, b = -3$

$\therefore\ a + b = 4$

11. 네 점 O(0, 0), A(3, 1), B(4, 3), C(a, b)를 꼭짓점으로 하는 □OABC가 평행사변형일 때, $a+b$의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선 OB, AC의 중점이 일치하므로

$\left(2, \frac{3}{2}\right)=\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$

$\frac{a+3}{2}=2$에서 $a=1$

$\frac{b+1}{2}=\frac{3}{2}$에서 $b=2$

$\therefore\ a+b=3$

12. △ABC의 꼭짓점 A(4, 6), B(−2, 2)이고, 무게중심이 G(1, 3)일 때 꼭짓점 C의 좌표는?

① (−1, 1) ② (1, −1) ③ (1, 1)
④ (−1, −1) ⑤ (1, 2)

해설
무게중심 구하는 공식을 이용한다.
점 C(x, y)라 하면,
$$G = \left(\frac{4-2+x}{3}, \frac{6+2+y}{3}\right) = (1, 3)$$
$\therefore\ x = 1,\ \ y = 1$

13. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 + ax - 2y = 0$ 이 중심이 $\mathrm{C}(1, 1)$ 인 원을 나타낼 때, 이 원의 반지름의길이는?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

해설

$x^2+y^2+ax-2y=0$ 을 표준형으로 고치면 $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{a^2+4}{4}$ 이므로

중심의 좌표는 $\mathrm{C}\left(-\frac{a}{2},\ 1\right)$

반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}$

$\therefore a=-2$

따라서 구하는 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다

14. 두 점 A(−3, 4), B(1, −2) 를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2+(y-1)^2=13$　② $(x-1)^2+(y+1)^2=13$

③ $(x-1)^2+(y+1)^2=10$　④ $(x+1)^2+(y-1)^2=10$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=9$

해설

A(−3, 4), B(1, −2)가 지름의 양 끝점이므로
$\overline{AB}$ 의 중점이 원의 중심 O(−1, 1) 이고,

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{OA}=\overline{OB}=r$

반지름 $r=\overline{OA}=\sqrt{(-3+1)^2+(4-1)^2}$
$=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

∴ 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=13$

15. 방정식 $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2=c$ ② $c^2=b$ ③ $a^2=c$
④ $c^2=a$ ⑤ $b=2c$

해설
y 축과의 공유점을 구하는 식은 $x=0$ 으로부터
$y^2+2by+c=0$
y 축에 접할 조건은 $D/4=b^2-c=0$

16. 직선 $y = -3x + 2$을 다음과 같이 대칭 이동 할 때, 옳은 것을 모두 고르면?

① (x 축) : $y = 3x - 2$

② (y 축) : $y = -3x - 2$

③ (원점) : $y = 3x + 2$

④ ($y = x$) : $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

⑤ ($y = -x$) : $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

해설

① x 축 : $y = -3x + 2 \rightarrow (-y) = -3x + 2$
$\rightarrow y = 3x - 2$ (O)
② y 축 : $y = -3x + 2 \rightarrow y = -3(-x) + 2$
$\rightarrow y = 3x + 2$ (X)
③ 원점 : $y = -3x + 2 \rightarrow (-y) = -3(-x) + 2$
$\rightarrow y = -3x - 2$ (X)
④ $y = x$: $y = -3x + 2 - \rightarrow x = -3y + 2$
$\rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ (O)
⑤ $y = -x$: $y = -3x + 2 - \rightarrow (-x) = -3(-y) + 2$
$\rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ (X)

17. 직선 $y = 3x - 3$의 그래프를 직선 $y = x$에 대칭이동한 직선의 방정식은?

① $y = 3x + 1$　② $y = \frac{1}{3}x + 1$　③ $y = -\frac{1}{3} + 1$
④ $y = \frac{1}{3}x - 1$　⑤ $y = 3x - 1$

해설

$y = x$ 대칭은 $x \to y$좌표로, $y \to x$를 대입한다.

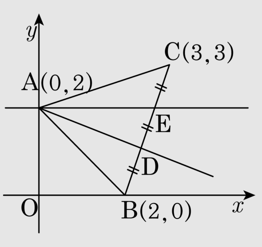
18. 점 A$(0,2)$, B$(2,0)$, C$(3,3)$ 으로 이루어진 삼각형ABC 가 있다. $\triangle$ABC 가 직선 $(k+1)x+(k-1)y=2(k-1)$ 에 의해 두 개의 도형으로 나누어지며, 한 쪽의 넓이가 다른 쪽 넓이의 두 배가 될 때의 k 값을 구하여라. (단, k 는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$k(x+y-2)+x-y+2=0$ 은 k 에 관계없이
A$(0,2)$ 를 지나는 직선이므로
$\triangle$ABC 를 그림과 같이
2 개의 삼각형으로 나누게 된다



따라서 $\overline{\mathrm{BC}}$ 를 $1:2$ 또는 $2:1$ 로 내분하는
점D, E 를 지나게 된다.

D$\left(\frac{7}{3},1\right)$, E$\left(\frac{8}{3},2\right)$ 이므로

(ⅰ) D 를 지날 때,

$k\left(\frac{7}{3}+1-2\right)+\frac{7}{3}-1+2=0$

$k=-\frac{5}{2}$ 이므로 부적합 ($\because k$ 는 정수)

(ⅱ) E 를 지날 때,

$k\left(\frac{8}{3}+2-2\right)+\frac{8}{3}-2+2=0$

$\therefore\ k=-1$

19. 두 정점 A(0, 0), B(0, 6) 에서의 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 가 그리는 도형의 넓이를 구하면?

① π ② 4π ③ 8π ④ 12π ⑤ 16π

해설

점 P 의 자취는 A, B 를 2 : 1 로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝으로 하는 원과 같다.

$\Rightarrow$ 내분점은 $\left(0,\ \frac{2\times 6}{2+1}\right) = (0,\ 4)$

$\Rightarrow$ 외분점은 $\left(0,\ \frac{2\times 6}{2-1}\right) = (0,\ 12)$

$\therefore$ 중심은 (0, 8) 이고, 반지름이 4 인 원

$\Rightarrow$ 넓이는 $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$

20. 두 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$, $x^2+y^2=r^2$ 의 위치 관계가 내접하도록 하는 상수 r 의 값을 구하여라. (단, $r>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

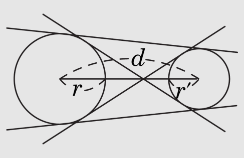
두 원을
$C_1:(x-3)^2+(y-4)^2=9 \leftarrow$ 중심 $(3,4)$
$C_2:x^2+y^2=r^2(r>0) \leftarrow$ 중심 $(0,0)$
두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 $3, r$ 이고, 중심거리는 $\sqrt{3^2+4^2}=5$ 이다.
이 때, $|r-3|=5$ 이어야 하므로 $r-3=\pm5$
$\therefore r=8(\because r>0)$

21. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2, (x-9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설



먼저 두 원의 반지름의 길이의 합 $r + r'$, 차 $r \sim r'$, 중심거리 d 를 구하여
두 원의 위치관계를 파악한다.
두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면
$r + r' = 5, r \sim r' = 1$ $d = 9$ 이므로
$r + r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두 4 개

22. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2+y^2=4, \quad y=x+3$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심 $(0,0)$ 에서 직선 $y=x+3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$d=\dfrac{|3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

이때, $d=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}>2=r$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

∴ 교점의 개수 : 0 개

23. 원 $x^2+y^2+10x-8y+16=0$ 에 의하여 잘려지는 x축 위의 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 축을 지나는 점은 $y=0$ 이므로
$x^2+10x+16=0 \Rightarrow (x+2)(x+8)=0$
$\Rightarrow \ x=-2, \ -8$
$\therefore x$ 축 위의 교점 : $(-8, \ 0), \ (-2, \ 0)$
$\therefore$ 구하는 선분의 길이 : 6

24. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2^2$
직선이 원에 접하므로 원의 중심
$(1,\ -1)$ 에서 직선까지의 거리가
원의 반지름의 길이2 와 같다.
따라서, $\dfrac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$
$|a - 1| = 10$
$a - 1 = \pm 10$
$a > 0$ 이므로 $a = 11$

25. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 2^2$

$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$ $\sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$