1. 좌표평면에서 두 점 A(7, 2), B(3, 5) 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

두 점 A(7, 2), B(3, 5) 사이의 거리는 $\overline{AB} = \sqrt{(3-7)^2+(5-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

2. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -3)$, $\mathrm{B}(3,\ 7)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:3$으로 내분하는 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 $2:3$으로 외분하는 점 $\mathrm{Q}(c,\ d)$에 대하여 $a+b+c+d$의 값은?

① $-\frac{134}{5}$ ② $-\frac{116}{5}$ ③ $\frac{134}{5}$ ④ $\frac{116}{5}$ ⑤ 20

해설

$$\mathrm{P}(a,\ b)=\left(\frac{2\times3+3\times1}{2+3},\ \frac{2\times7+3\times(-3)}{2+3}\right)$$

$$=\left(\frac{9}{5},\ 1\right)$$

$$\mathrm{Q}(c,\ d)=\left(\frac{2\times3-3\times1}{2-3},\ \frac{2\times7-3\times(-3)}{2-3}\right)$$

$$=(-3,\ -23)$$

$$\therefore\ a+b+c+d=\frac{9}{5}+1-3-23$$

$$=-\frac{116}{5}$$

3. 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(2,\ 2)$, $\mathrm{C}(3,\ 1)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심이 $\mathrm{G}(a,\ b)$이다. $a+b$의 값은?

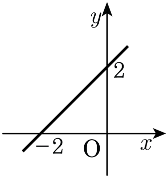
① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 0

해설

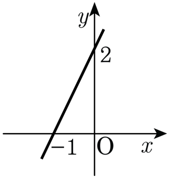
세 점의 좌표를 알 때
무게중심을 구하는 공식에서
$a=(1+2+3)\div 3=2, b=(3+2+1)\div 3=2$
따라서 $a+b=2+2=4$

4. 다음 중 직선 $y = 2(x+1)$ 을 나타내는 그래프는?

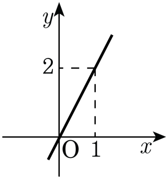
①



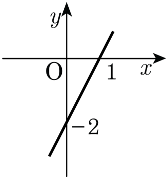
②



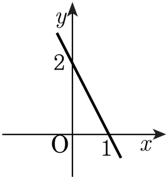
③



④



⑤



해설

$y = 2(x+1) = 2x + 2$ 이므로, 기울기가 2 이고,
y 절편이 2 인 그래프는 ②번이다.

5. 점 $(4,6)$을 지나고, x 축에 평행한 직선을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $y=6$

해설

점 $(4,\ 6)$을 지나고 x 축에 평행한 직선이므로
$y=6$

6. 세 점 $(0,\ 2)$, $(3,\ 8)$, $(a,\ 3a)$ 가 일직선 위에 있을 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

세 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ 8)$, $\mathrm{C}(a,\ 3a)$로 놓으면

직선 AB의 기울기 : $\dfrac{8-2}{3-0}=2$

직선 BC의 기울기 : $\dfrac{3a-8}{a-3}$

한편, 세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로

직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 서로 같다.

$\dfrac{3a-8}{a-3}=2,\ 3a-8=2a-6$

$\therefore a=2$

7. 다음 <보기> 중 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$ 과 서로 수직인 직선을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $y=2x+1$　　ㄴ $y=-2(x-1)$

ㄷ $y=-2x+3$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

해설

서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이므로

직선 $y\ \frac{1}{2}x+1$ 과 수직인 직선의 기울기는 -2 이다.

기울기가 -2 인 직선은 ㄴ, ㄷ이다.

8. 두 직선 $ax+4y-4=0$, $x+2y+b=0$이 수직일 때의 a값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

수직조건 $a \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 0$

$\therefore\ a = -8$

9. 두 직선 $3x+2y+1=0$, $x+3y-2=0$의 교점과 직선 $3x-y+2=0$ 사이의 거리를 구하면?

① $\frac{\sqrt{7}}{5}$　② $\frac{\sqrt{10}}{5}$　③ $\frac{\sqrt{7}}{2}$　④ $\frac{\sqrt{10}}{2}$　⑤ $\frac{\sqrt{15}}{5}$

해설

$3x+2y+1=0 \cdots\cdots$ ㉠

$x+3y-2=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ $-$ ㉡ $\times 3$에서 $-7y+7=0$

$\therefore\ y=1,\ x=-1$

따라서, 교점의 좌표는 $(-1, 1)$이다.

점 $(-1, 1)$과 직선 $3x-y+2=0$

사이의 거리 d는

$$d=\frac{|3\times(-1)-1+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

10. 두 점 $A(-1,\ 2)$, $B(3,\ 4)$에 대하여 점 P가 x축 위를 움직일 때, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은?

① $2\sqrt{13}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{41}$ ④ 5 ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 $B'(3,\ -4)$

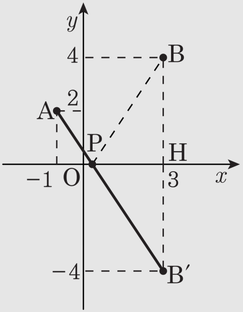
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최소거리는 $\overline{AP}+\overline{B'P}$의 최소 거리와 같고

세 점 A, P, B′이 직선 위에 있을 때

가장 짧은 $\overline{AB'}$이 최소거리이다.

$\therefore\ \overline{AB'}=\sqrt{(3+1)^2+(-4-2)^2}=2\sqrt{13}$



11. 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점 A$(-1,\ -2)$, B$(6,\ 4)$, D$(0,\ 2)$이고, $\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$가 이웃하는 두 변일 때 나머지 한 꼭짓점 C의 좌표는?

① C$(5,\ 0)$ ② C$(0,\ 5)$ ③ C$(7,\ 8)$

④ C$(8,\ 7)$ ⑤ C$(7,\ 6)$

해설

C(a,b) 라고 하면, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점과 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점은 같다.

$$\left(\frac{-1+a}{2},\ \frac{-2+b}{2}\right)=\left(\frac{6+0}{2},\ \frac{4+2}{2}\right)$$

$-1+a=6,\ \ -2+b=6$

$\therefore\ a=7,\ b=8$

$\therefore\ \mathrm{C}(7,8)$

12. 두 점 (1, 2), (2, 1)을 지나고, x축에 접하는 원은 두 개있다. 두 원의 중심 사이의 거리는?

① 4 ② 5 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 6 ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

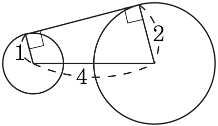
그 원을 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ 이라 하면
(1, 2), (2, 1)을 지나므로
$(1-a)^2+(2-b)^2=b^2$, $(2-a)^2+(1-b)^2=b^2$
$1-2a+a^2+4-4b=0 \cdots$ ㉠
$4-4a+a^2+1-2b=0 \cdots$ ㉡
㉡ $\times 2-$ ㉠
$a^2-6a+5=0$, $(a-1)(a-5)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $a=5$
i) $a=1$ 이면 ① 에서 $b=1$
ii) $a=5$ 이면 ① 에서 $b=5$
$\therefore$ 두 원의 중심은 $(1,1)$, $(5,5)$ 이다.
중심거리
$=\sqrt{(5-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

13. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-4)^2+y^2=4$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 0 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

두 원의 중심간 거리는 4 이다.
피타고라스의 정리에 의해 공통외접선의 길이를 구하면
$\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$ 이다.



14. 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 (a,b) 에서의 접선이 점 $(6,6)$ 을 지날 때, ab 의 값은?

① $-\frac{27}{8}$ ② $-\frac{15}{8}$ ③ $-\frac{7}{8}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{15}{8}$

해설

원 위의 점 (a,b) 에서의 접선의 방정식은
$ax+by=9$ 이고
이 접선이 점 $(6,\ 6)$ 을 지나므로

$$6a+6b=9 \qquad \therefore a+b=\frac{3}{2}$$

또, 점 (a,b) 는 원 위의 점이므로
$a^2+b^2=9$
이때, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 에서

$$9=\frac{9}{4}-2ab \qquad \therefore ab=-\frac{27}{8}$$

15. 점 A(2, 1)를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점이 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$(2-1,\quad 1+4)=(a,\ b)$ 따라서 $a+b=6$

16. 평행이동 $f : (x, y) \to (x-2, y+1)$ 에 의하여 직선 $2x+y+5=0$ 이 이동한 직선의 방정식을 구하면?

① $2x+y+1=0$ ② $2x+y+2=0$ ③ $2x+y+6=0$
④ $2x+y+8=0$ ⑤ $2x+y+9=0$

해설

$x' = x-2, \quad y' = y+1$ 이라 하자.
x, y 를 원래 식에 대입하면,
$2(x'+2)+(y'-1)+5=0$
$\Rightarrow \quad 2x'+y'+8=0$
$\Rightarrow \quad 2x+y+8=0$

17. 방정식 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$의 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은?

① $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$　　② $x^2 + y^2 = 5$

③ $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$　　④ $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

⑤ $x^2 - y^2 + 2x + 4y = 0$

해설

원점대칭은 x, y부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x$, $y \to -y$를 대입한다.

18. 점 (5, 3) 으로 부터의 거리가 2 이고, 점 (2, 1) 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = x,\ 12x - 5y - 19 = 0$

② $y = 1,\ 12x - 5y - 19 = 0$

③ $y = 1,\ 12x - 5y + 5 = 0$

④ $y = 1,\ 4x - 5y - 8 = 0$

⑤ $y = -1,\ 12x + 5y - 12 = 0$

해설

점 (2, 1) 을 지나는 직선의 기울기를 m 이라 하면 $y - 1 = m(x - 2)$ $\cdots$ ㉠
점 (5, 3) 과 직선 ㉠사이의 거리가 2 이므로

$$\frac{|m(5-2) - 3 + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$$

$(3m - 2)^2 = 4(m^2 + 1)$

$5m^2 - 12m = 0$

$\therefore\ m = 0,\ \dfrac{12}{5}$

㉠에 대입하면 $y = 1,\ 12x - 5y - 19 = 0$

19. 세 점$(-3,\ 1)$, $(5,\ 5)$, $(-2, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심(외심)의 좌표를 구하면?

① $(3,\ -1)$ ② $(2,\ 1)$ ③ $(4,\ 2)$

④ $(-3,\ -2)$ ⑤ $(3,\ -2)$

해설

외접원의 방정식을

$x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0 \cdots$ ㉠ 이라 하면,

㉠은 $(-3,\ 1)$, $(5,\ 5)$, $(-2,\ -2)$를 지나므로

$$\begin{cases} 10-3\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=0 \\ 50+5\mathrm{A}+5\mathrm{B}+\mathrm{C}=0 \\ 8-2\mathrm{A}-2\mathrm{B}+\mathrm{C}=0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면

$\mathrm{A}=-4,\ \ \mathrm{B}=-2\ ,\ \mathrm{C}=-20$

따라서, 구하는 원은 $x^2+y^2-4x-2y-20=0$

즉, $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ 이고 중심은 $(2,\ 1)$

20. 중심이 직선 $3x+y=12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면
중심의 좌표는 $(r,\ r)$ 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식을
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠
한편, 점 $(r,\ r)$ 는 직선 $3x+y=12$ 위에 있으므로 $3r+r=12$
$\therefore\ r=3$
따라서, 구하는 원의 방정식은 ㉠에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$

21. 두 점 $A(0,\ -1)$, $B(0,\ 2)$ 에 이르는 거리의 비가 $1:2$ 인 점 $P(x,\ y)$ 가 나타내는 도형의 길이를 구하면?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ 2π ④ 4π ⑤ 6π

해설

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 1:2$

$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{BP}} = 2\overline{\mathrm{AP}}$

$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{BP}}^2 = 4\overline{\mathrm{AP}}^2$

$\Rightarrow\ x^2 + (y-2)^2 = 4\left\{x^2 + (y+1)^2\right\}$

$\Rightarrow\ x^2 + y^2 + 4y = 0$

$\Rightarrow\ x^2 + (y+2)^2 = 4$

반지름이 2 인 원이므로 도형의 길이는 4π

22. 두 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$, $(x+3)^2+(y-4)^2=4$가 외접할 때, r의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$, $(x+3)^2+(y-4)^2=4$의 중심 사이의 거리 $d=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

두 원이 외접하면 $r+2=5$이므로 $r=3$

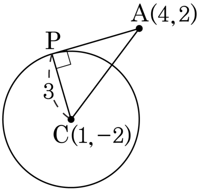
23. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 이 주어졌을 때, 점 A(4, 2) 에서 그은 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ 이다.
다음 그림에서 접선의 길이는
$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2}$
한편, $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고 $\overline{\mathrm{CP}} = 3$
$\therefore \overline{\mathrm{AP}} = 4$



24. 직선 $3x-4y-12=0$ 에 수직이고 원 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ 에 접하는 접선의 방정식을 구하면?

① $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{5}{2}x-\frac{1}{3}$
② $y=-2x-\frac{4}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{5}x-1$
③ $y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$
④ $y=-\frac{6}{5}x-\frac{2}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{7}x-\frac{9}{2}$
⑤ $y=-4x-3$ 또는 $y=-9x-6$

해설

$3x-4y-12=0$ 에서

$y=\frac{3}{4}x-3 \cdots\cdots$ ㉠

이 때, 구하는 접선이 ㉠과 수직이므로

기울기가 $-\frac{4}{3}$ 인 직선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x+b \cdots\cdots$ ㉡

로 놓을 수 있다.
㉡에서 $4x+3y-3b=0$ 이고,
원의 중심 $(-3,2)$ 에서 이 직선까지의 거리가
반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|-12+6-3b|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1, |3b+6|=5, 3b+6=\pm5$

$3b=-1$ 또는 $3b=-11$

$\therefore b=-\frac{1}{3}$ 또는 $b=-\frac{11}{3}$

이것을 ㉡에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$

해설

$(x+3)^2+(y-2)^2=1$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+6x-4y+12=0$ 이므로
㉡을 이 식에 대입하여 정리하면
$25x^2+6(17-4b)x+9\left(b^2-4b+12\right)=0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

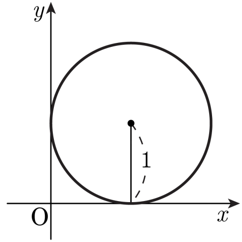
$\frac{D}{4}=\{3(17-4b)\}^2-25\cdot9\left(b^2-4b+12\right)=0$

$D=0$에서 $9b^2+36b+11=0$,
$(3b+1)(3b+11)=0$

$\therefore b=-\frac{1}{3}$ 또는 $b=-\frac{11}{3}$ 이것을 ㉡ 에 대입하면
구하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$

25. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x축, y축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 $(x,\ y)$에 대하여 $\dfrac{y+2}{x+1}$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\dfrac{y+2}{x+1}=k$라 하면 직선 $y+2=k(x+1)$은

k 값에 관계없이 점 $(-1,-2)$를 지난다.

이 때, 기울기 k는 직선이 원래 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$$

$|2k-3|=\sqrt{k^2+1}$

$4k^2-12k+9=k^2+1$

$3k^2-12k+8=0$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로

근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.