1. 두 점 $\mathrm{A}(3,-1), \mathrm{B}(a,-3)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=2$ 일 때, a 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(a-3)^3+(-3+1)^2=4$

$a^2-6a+9=0$

$(a-3)^2=0$

$\therefore \quad a=3$

2. 점 $A(-1,\ -1)$에 대하여 점 $P(2,\ 3)$과 대칭인 점 Q의 좌표를 구하면?

① $Q(-4,\ 5)$ ② $Q(4,\ -5)$ ③ $Q(-4,\ -5)$
④ $Q(-2,\ -3)$ ⑤ $Q(1,\ 1)$

해설

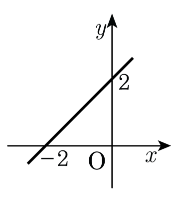
점 P와 점 Q는 점 A에 대하여 대칭이므로
$\overline{PA} = \overline{QA}$이다.
즉 선분 PQ의 중점이 점 A이다.
$Q(x,\ y)$라 하면, 점 $P(2,\ 3)$과
점 Q를 이은 선분의 중점이 $A(-1,\ -1)$이므로
$\frac{x+2}{2} = -1,\ \frac{y+3}{2} = -1$
$\therefore\ x = -4,\ y = -5$
$\therefore\ Q(-4,\ -5)$

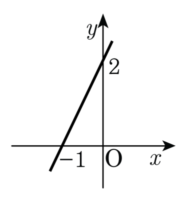
3. B(4, 2), C(0, 5)인 △ABC의 무게중심의 좌표가 (1, 1)일 때, 꼭짓점 A의 좌표를 구하면?

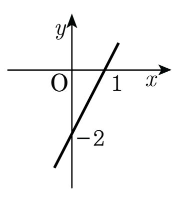
① A(−2, −3) ② A(−2, −4) ③ A(−1, −4)
④ A(−1, −3) ⑤ A(−1, 4)

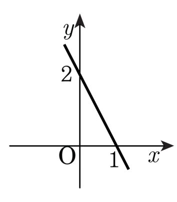
해설
A(x, y)라 하면
$\dfrac{x+4+0}{3}=1$, $\dfrac{y+2+5}{3}=1$
$\therefore x=-1,\ y=-4$

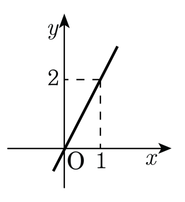
4. 다음 중 직선 $y = 2(x+1)$ 을 나타내는 그래프는?

①


②


③


④


⑤


해설

$y = 2(x+1) = 2x+2$ 이므로, 기울기가 2 이고,
y 절편이 2 인 그래프는 ②번이다.

5. 점 A$(2,3)$에서 직선 $y=-1$까지의 거리는 ( )이고, 직선 $x=-2$까지의 거리는 ( ) 이다. 위의 ( )안에 알맞은 값을 차례로 나열한 것은?

① $2,3$ ② $3,2$ ③ $3,3$ ④ $4,3$ ⑤ $4,4$

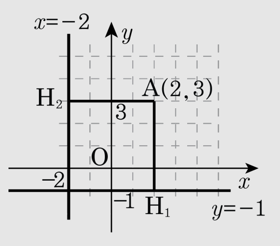
해설

다음 그림에서 점 A에서 $y=-1$에 내린 수선의발을 H_1 이라 하면

$\overline{AH_1}=4$ 이다.

또한 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H_2라고 하면

$\overline{AH_2}=4$ 이다.



6. 다음 보기 중 직선 $y=-2x+5$ 와 수직인 직선을 모두 고르면?

보기

㉠ $4x-2y=3$ ㉡ $x-2y=1$

㉢ $y=\frac{1}{2}x+3$ ㉣ $y=-2x-5$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

직선 $y=-2x+5$ 와 서로 수직이려면

기울기의 곱이 -1 이어야 한다.

따라서, 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 것은 ㉡, ㉢이다.

7. 직선 $y = mx - m + 2$ 는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 그 점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

m 에 관해서 정리하면
$(x-1)m + 2 - y = 0$ 이므로 이것은
m 의 값에 관계없이 두 직선
$x - 1 = 0,\ 2 - y = 0$ 의 교점을 지난다.
$x - 1 = 0$ 에서 $x = 1$, $2 - y = 0$ 에서 $y = 2$
따라서 교점은 $(1, 2)$ 이다.
「$y = mx - m + 2 \ \Leftrightarrow\ y - 2 = m(x-1)$」 이므로
공식 $y - y_1 = m(x - x_1)$ 과 비교해 보면
$(x_1,\ y_1) = (1,\ 2)$ 임을 알 수 있다.
$\therefore a + b = 3$

8. 점$(-3, 1)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로-3만큼 평행이동한 점의 좌표는?

① $(-1, -2)$　② $(-5, 4)$　③ $(-1, 4)$
④ $(-5, -2)$　⑤ $(-1, -4)$

해설

$(-3, 1) \to (x+2, y-3)$ 이므로 $(-3+2, 1-3) = (-1, -2)$

9. 좌표평면 위의 점 P 를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후, 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 점 $(3,\ 2)$ 가 되었다. 이 때, 점 P 의 좌표는?

① $(0,\ 2)$ ② $(3,\ -1)$ ③ $(0,\ 3)$
④ $(2,\ 1)$ ⑤ $(1,\ 2)$

해설

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 하고 점 P 를
x 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $(a+2,\ b)$
이 점을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면 $(b,\ a+2)$
이것이 점 $(3,\ 2)$ 와 일치해야 하므로
$b=3,\ a+2=2$
$\therefore\ a=0$
따라서, 점 P 의 좌표는 $(0,\ 3)$ 이다.

10. 두 점 A$(-1,\ 2)$, B$(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

① P$(2.4, -1)$, Q$(0,\ 6)$
② P$(3.6, 0)$, Q$(-1,\ 6)$
③ P$(3.6,\ 0)$, Q$(0,\ 6)$
④ P$(2.4, 0)$, Q$(0,\ 5)$
⑤ P$(3.6, 0)$, Q$(-1,\ 2)$

해설

A$(-1,\ 2)$, B$(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 P$(x,\ 0)$ 과 Q$(0,\ y)$를 구해야 하므로 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore\ x = 3.6 \quad \therefore\ \mathrm{P}(3.6,\ 0)$

$\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{BQ}}$에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$

양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore\ y = 6 \ \therefore\ \mathrm{Q}(0,\ 6)$

11. 세 점 A $(1,5)$, B $(-4,-7)$, C $(5,2)$가 좌표평면 위에 있다. $\triangle$ABC 에서 $\angle$A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, 점 D 의 좌표를 구하면?

① $(0,0)$
② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$
③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$
⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = 13$, $\overline{\mathrm{AC}} = 5$
따라서 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = 13 : 5$
D 는 B , C 를 $13 : 5$ 로 내분한 점
$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

12. 세 점 A$(1, 4)$, B $(-1, 2)$, C $(5, a)$가 일직선 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하면?

① 2　② 8　③ 10　④ −2　⑤ −4

해설

A, B를 지나는 직선의 방정식은

기울기 $= \dfrac{4-2}{1-(-1)} = 1$

$y = 1 \cdot (x-1) + 4 = x + 3$

위에 $C(5,\ a)$가 존재하므로 대입하면,

$\therefore\ a = 5 + 3 = 8$

13. 두 직선 $kx+2y+3=0$, $2x+ky+4=0$이 서로 평행하도록 양수 k의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

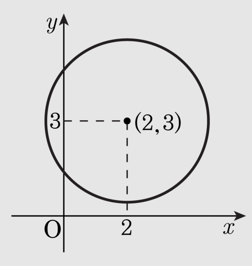
두 직선이 평행하려면 기울기는 같고
y절편은 달라야 한다.
$\frac{k}{2}=\frac{2}{k}\neq\frac{3}{4}$ $\therefore$ $k^2=4$
따라서 양수 k의 값은 2이다.

14. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - c = 0$ 이 y 축과 만나고 x 축과는 만나지 않을 때, 정수 c 의 개수는?

① 2개　② 3개　③ 4개　④ 5개　⑤ 6개

해설

원의 방정식
$x^2 + y^2 - 4x - 6y - c = 0$
을 표준형으로 바꾸면
$(x-2)^2 + (y-3)^2 = c + 13$ 이므로
중심이 $(2, 3)$ 반지름의 길이가 $\sqrt{c+13}$
인 원이 된다.



다음 그림과 같이 y 축과는 만나고,
x 축과는 만나지 않으므로
$2 \leq \sqrt{c+13} < 3$ 에서 $-9 \leq c < -4$
$\therefore$ 정수 c 의 개수는 $-9, -8, -7, -6, -5$ 의 5개

15. 세 점 $\mathrm{P}(-1,4)$, $\mathrm{Q}(3,6)$, $\mathrm{R}(0,-3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{PQR}$ 의 외접원의 방정식은?

① $x^2+y^2-x-2y-3=0$

② $x^2+y^2+2x-1y-10=0$

③ $x^2+y^2-4x-5y-8=0$

④ $x^2+y^2-6x-2y-15=0$

⑤ $x^2+y^2-6x-5y-20=0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$
으로 놓으면 이 원이
세 점 $\mathrm{P}(-1,4)$, $\mathrm{Q}(3,6)$, $\mathrm{R}(0,-3)$을
지나므로 차례로 대입하면

$1+16-A+4B+C=0 \quad \cdots ㉠$

$9+36+3A+6B+C=0 \quad \cdots ㉡$

$9-3B+C=0 \quad \cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$A=-6, B=-2, C=-15$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-6x-2y-15=0$

16. 이차방정식 $x^2+y^2-4x-2y-k=0$ 이 원을 나타내도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면?

① $k<-5$　　② $k>-5$　　③ $-5<k<5$
④ $k<\sqrt{5}$　　⑤ $k>-\sqrt{5}$

해설

원 $x^2+y^2-4x-2y-k=0$ 을 표준형으로 고치면,
$(x-2)^2+(y-1)^2=k+5$
이 때, $k+5>0$ 이어야 하므로 $k>-5$

17. 직선 $y=2x-3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동 하였더니 다시 $y=2x-3$ 의 그래프가 되었다. 이 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

직선 $y=2x-3$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y-b=2(x-a)-3$
직선의 방정식을 정리하면
$y=2x-2a-3+b$
원래 직선과 같아졌으므로
$-2a+b-3=-3$, $2a=b$,
$\therefore \frac{b}{a}=2$

18. 두 원 $x^2+y^2=2$과 $(x-a)^2+(y-a)^2=2$이 만나지 않을 때, 실수 a의 값의 범위는 $a<p$ 또는 $a>q$이다. 이때, $p+q$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

두 원 $x^2+y^2=2$, $(x-a)^2+(y-a)^2=2$는 만나지 않는다.
즉, 두 원이 서로 외부에 있거나 한 원이 다른 원의 내부에 있어야 하는데, 두 원의 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{2}$이므로 한 원이 다른 원의 내부에 있을 수는 없다. 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,\ 0)$, $(a,\ a)$이므로 중심거리는

$\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}|a|$

따라서 두 원이 서로 외부에 있으려면

$\sqrt{2}|a|>\sqrt{2}+\sqrt{2}$, $|a|>2$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>2$

19. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가
반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore\ n > 4$ ($\because$ n 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5 이다.

20. 원 $x^2+y^2=2$ 와 직선 $y=-x+k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k<0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=-2$

해설

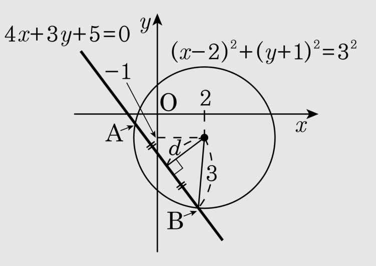
원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 접하려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.
$\Rightarrow$ 중심 : $(0,\ 0)$ 직선 : $x+y-k=0$
$\dfrac{|1\times0+1\times0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$
$\Rightarrow$ $k=\pm2$
$\therefore$ $k=-2$ ($\because$ $k<0$)

21. 원 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$과 직선 $4x+3y+5=0$이 만나서 생기는 현의 길이는?

① $\sqrt{5}$　　② $\sqrt{5}+1$　　③ $2\sqrt{5}$

④ $3\sqrt{5}$　　⑤ $3\sqrt{5}-1$

해설



$x^2+y^2-4x+2y-4=0$

$\Leftrightarrow \quad (x-2)^2+(y+1)^2=3^2$

$(2,-1)$에서 직선 $4x+3y+5=0$에

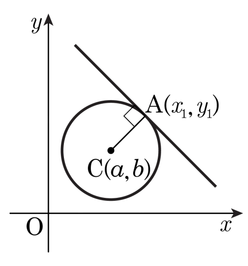
이르는 거리 d는, $d=\dfrac{|8-3+5|}{\sqrt{16+9}}$

직선과 원과의 두 교점을 각각 A, B라 하면

$\therefore \dfrac{\overline{AB}}{2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AB}=2\sqrt{5}$

22. 다음은 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위의 점 $A(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식이 $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$ 으로 나타내어짐을 보인 것이다. 이 때, (가) ~ (마) 에 알맞지 <u>않은</u> 것은?



점 A(x_1, y_1) 과 이 원의 중심 $C(a, b)$ 를 지나는 직선 CA 의 기울기는 (가) 이다.
그런데 점 A 에서의 접선은 직선 CA 와 수직이므로
점 A 에서의 접선의 방정식은
$y-y_1=$ (나) $(x-x_1)$
$\therefore (x_1-a)(x-x_1)+(y_1-b)(y-y_1)=0$
이 식을 변형하면
$(x_1-a)(x-a+a-x_1)+$(다)$=0$
$(x_1-a)(x-a)-(x_1-a)^2+(y_1-b)(y-b)-(y_1-b)^2=0$
$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=$ (라) ······㉠
한편, 점 A(x_1, y_1) 은
원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위에 있으므로
$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=$ (마) ······㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은
$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

① (가): $\dfrac{y_1-b}{x_1-a}$
② (나): $-\dfrac{x_1-a}{y_1-b}$
③ (다): $(y_1-a)(y-a+a-y_1)$
④ (라): $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2$
⑤ (마): r^2

해설

③ (다): $(y_1-b)(y-b+b-y_1)$

23. 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 을
표준형으로 고치면 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 이므로
중심이 $(1,\ -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1,\ -2)$ 에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1-(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
$d-$ (반지름의 길이)$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

24. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(8, 0)$, $\mathrm{B}(0, 6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle\mathrm{AOB} = 90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{\mathrm{AB}} = 10$ 이고 원의 중심은 $\mathrm{C}(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
$a = -8,\ b = -6,\ c = 0$
$\therefore abc = 0$

25. 이차방정식 $x^2+y^2=2|x|$과 $x^2+y^2=2|x+y|$의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$x^2+y^2=2|x| \cdots$ ㉠

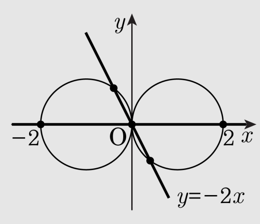
$x^2+y^2=2|x+y| \cdots$ ㉡

㉠) 과 ㉡) 에서 $2|x|=2|x+y|$

$\therefore x+y=\pm x$

$\therefore y=0$ 또는 $y=-2x \cdots$ ㉢

㉠과 ㉢의 교점의 개수는 다음 그림에서 5개이다.



실제로, 교점을 구하면

$(0,\ 0),\ (\pm 2,\ 0),$

$\left(\pm\frac{2}{5},\ \mp\frac{4}{5}\right)$

(복부호동순)