

1. 다음 중에서 성립하지 않는 것은?

① $a^2 \geq 0$

② $a^2 + b^2 \geq 0$

③ $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$

④ $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

⑤ $a > b \Leftrightarrow ab > 0$

해설

① $a^2 \geq 0$ (항상 성립)

② $a^2 + b^2 \geq 0$ (항상 성립)

③ $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (항상 성립)

④ $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ (항상 성립)

⑤ $a > b \Leftrightarrow ab > 0$

(반례: $a > 0, b < 0$ 이면 $a > b$ 이지만 $ab < 0$ 이다.)

2. $-2 \leq x \leq -1$ 일 때, $A = \frac{12}{2-x}$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 $p \leq A \leq q$ 이다. 이 때, pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$-2 \leq x \leq -1$ 의 각 변에 -1 을 곱하면

$$1 \leq -x \leq 2$$

다시 각 변에 2를 더하면 $3 \leq 2-x \leq 4$

각 변의 역수를 취하면 $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2-x} \leq \frac{1}{3}$

각 변에 12를 곱하면 $3 \leq \frac{12}{2-x} \leq 4$

$$\therefore p = 3, q = 4$$

$$\therefore pq = 12$$

3. 부등식 $ax - b^2 > bx + a^2 - 8$ 의 해가 모든 실수이기 위한 a 의 조건은?
(a, b 는 실수)

① $a = b$ 이고 $-1 < a < 1$

② $a = b$ 이고 $-2 < a < 2$

③ $a = b$ 이고 $-3 < a < 3$

④ $a = b$ 이고 $-4 < a < 4$

⑤ $a = b$ 이고 $-5 < a < 5$

해설

$$ax - b^2 > bx + a^2 - 8 \text{에서}$$

$$(a - b)x - b^2 - a^2 + 8 > 0 \text{이 모든 } x \text{에 대해서 성립해야 하므로}$$
$$a = b$$

$$\therefore -2a^2 + 8 > 0 \quad 2a^2 < 8$$

$$\therefore a^2 < 4 \text{ 이므로 } -2 < a < 2$$

$$\text{즉 } a = b \text{ 이고 } -2 < a < 2$$

4. x 에 대한 부등식 $(a+b)x + a - 2b > 0$ 의 해가 $x < 1$ 일 때, x 에 대한 부등식 $(b-3a)x + a + 2b > 0$ 의 해는?

① $x < -10$

② $x < -5$

③ $x > -5$

④ $x < 5$

⑤ $x > 5$

해설

$(a+b)x + a - 2b > 0$ 에서 $(a+b)x > -a + 2b \cdots \textcircled{㉠}$

$\textcircled{㉠}$ 의 해가 $x < 1$ 이려면 $a + b < 0 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}$ 이 양변을 $a + b$ 로 나누면 $x < \frac{-a + 2b}{a + b}$ 이므로

$$\frac{-a + 2b}{a + b} = 1, \quad -a + 2b = a + b$$

$\therefore 2a = b \cdots \textcircled{㉢}$

$\textcircled{㉢}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면 $a + 2a = 3a < 0 \therefore a < 0$

$\textcircled{㉢}$ 을 부등식 $(b-3a)x + a + 2b > 0$ 에 대입하면

$(2a - 3a)x + a + 4a > 0, \quad -ax > -5a \therefore x > 5$

5. 연립부등식 $\begin{cases} -3x \leq 2(1-x) \\ 4+x < -2x+a \end{cases}$ 를 만족하는 정수가 3개만 존재하도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < 4$

② $4 < a < 7$

③ $a \leq 7$

④ $4 < a \leq 7$

⑤ $4 \leq a \leq 7$

해설

$$\begin{cases} -3x \leq 2(1-x) \\ 4+x < -2x+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x < \frac{a-4}{3} \end{cases}$$

정수 x 는 $-2, -1, 0$ 이므로 $0 < \frac{a-4}{3} \leq 1$

$\therefore 4 < a \leq 7$

6. 연립부등식 $\begin{cases} 2(x+6) > 4a \\ -4(3x-2) > -28 \end{cases}$ 의 해가 $-2 < x < 3$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$$2(x+6) > 4a, x+6 > 2a$$

$$\therefore x > 2a - 6$$

$$-4(3x-2) > -28, 3x-2 < 7$$

$$\therefore x < 3$$

$$2a - 6 < x < 3 \text{ 이므로 } 2a - 6 = -2$$

$$\therefore a = 2$$

7. 연립부등식

$$\begin{cases} 12 - x < 2(x + 1) + 1 < 4x - 1 \\ -a < x < a \end{cases} \quad \text{의 해가 없을 때, 양수 } a \text{ 의 값의}$$

범위는?

① $0 < a < 2$

② $0 < a \leq 2$

③ $0 < a < 3$

④ $0 < a \leq 3$

⑤ $2 < a < 3$

해설

$$\begin{cases} 12 - x < 2(x + 1) + 1 < 4x - 1 \cdots \textcircled{㉠} \\ -a < x < a \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

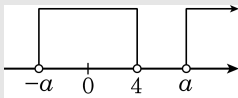
㉠ : $12 - x < 2(x + 1) + 1$ 의 해는 $x > 3$

$2(x + 1) + 1 < 4x - 1$ 의 해는 $x > 2$

$\therefore x > 3$

㉡ : $-a < x < a$

연립부등식의 해가 없으려면 다음 그림과 같아야 하므로 양수 a 의 값의 범위는 $0 < a \leq 3$ 이다.



8. 분모와 분자의 합이 52 인 기약분수를 소수로 고쳤더니, 정수 부분은 0 이고 소수 첫째 자리는 6 이었다. 이 기약분수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{21}{31}$

해설

분모 : x ,

분자 : $52 - x$

$$0.6 \leq \frac{52 - x}{x} < 0.7$$

① :

$$0.6x \leq 52 - x$$

$$1.6x \leq 52$$

$$x \leq \frac{52}{1.6}$$

$$x \leq 32.5 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

② :

$$52 - x < 0.7x$$

$$52 < 1.7x$$

$$x > \frac{52}{1.7}$$

$$x > 30.5 \dots \dots \textcircled{㉡}$$

①, ② 에서 $30.5 \dots < x \leq 32.5$

$x = 31, 32$ 일 때 분수는 $\frac{21}{31}, \frac{20}{32}$. 이 중 기약분수는 $\frac{21}{31}$ 이다.

9. 부등식 $|x| + |x-2| \leq 3$ 을 풀면 $m \leq x \leq n$ 이다. $m+n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

i) $x < 0$ 일 때

$$-x - x + 2 - 3 \leq 0$$

$$-2x \leq 1$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq x < 0$$

ii) $0 \leq x < 2$ 일 때

$$x - x + 2 \leq 3$$

$$\therefore 0 \leq x < 2$$

iii) $x \geq 2$ 일 때

$$2x - 2 \leq 3$$

$$2x \leq 5$$

$$\therefore 2 \leq x \leq \frac{5}{2}$$

i), ii), iii)에서 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$

$$\therefore m = -\frac{1}{2}, n = \frac{5}{2}, m+n=2$$

10. 부등식 $|x - k| \leq 3$ 을 만족하는 x 의 값 중에서 최댓값과 최솟값의 곱이 9일 때, 양수 k 의 값은?

① $\sqrt{2}$

② 2

③ $3\sqrt{2}$

④ 4

⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$$|x - k| \leq 3 \text{에서 } -3 \leq x - k \leq 3,$$

$$-3 + k \leq x \leq 3 + k$$

따라서 x 의 최댓값은 $3 + k$,

최솟값은 $-3 + k$ 이므로

$$(-3 + k)(3 + k) = 9$$

$$k^2 - 9 = 9$$

$$k^2 = 18 \quad \therefore k = \pm 3\sqrt{2}$$

k 는 양수이므로 $3\sqrt{2}$