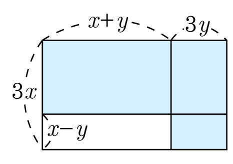
1. 다음 그림의 직사각형에서 색칠한 부분의 넓이를 나타내는 식을 세워 전개하였을 때, y^2 항의 계수는?



① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$(x+4y)(3x)-(x+y)(x-y)$
$=3x^2+12xy-x^2+y^2$
$=2x^2+12xy+y^2$

2. 다음 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy의 값을 구하여라.

$$(2k+3)x+(3k-1)y+5k-9=0$$

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

k에 대하여 내림차순으로 정리하면
$(2x+3y+5)k+(3x-y-9)=0$
이것은 k에 대한 항등식이므로
$2x+3y+5=0$
$3x-y-9=0$
연립방정식을 풀면 $x=2,\ y=-3$
$\therefore\ xy=2\times(-3)=-6$

3. 다항식 x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$가 되도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 직접나눈 나머지는

$(a-b+16)x+4b-8$

$(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로,

$a-b+16=3,\ 4b-8=4$

$\therefore\ a=-10,\ b=3$

$\therefore\ a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10,\ b=3,\ p=-4$를 구해도 된다.

4. x 에 대한 다항식 $4x^3-3x^2+ax+b$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 갖도록 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -37

해설

$P(x)=4x^3-3x^2+ax+b$ 라 하고 $P(x)$ 가
$(x+1)(x-3)$ 을 인수로 가지려면
$P(-1)=P(3)=0$
$P(-1)=-4-3-a+b=0 \ \therefore\ a-b=-7$
$P(3)=108-27+3a+b=0 \ \therefore\ 3a+b=-81$
$\therefore\ a=-22,\ b=-15$

5. $x^2+y^2+2xy-x-y$을 인수분해 하면?

① $(x-y)(x+y+1)$　② $(x+y)(x-y-1)$
③ $(x-y)(x-y-1)$　④ $(x+y)(x+y-1)$
⑤ $(x+y)(x+y+1)$

해설

$x^2+y^2+2xy-x-y$
$=(x+y)^2-(x+y)=(x+y)(x+y-1)$

6. $(a-b+c)(a+b-c)$를 전개한 식은?

① $a^2+b^2+c^2-2bc$
② $a^2-b^2+c^2-2bc$
③ $a^2-b^2-c^2+2bc$
④ $a^2+b^2-c^2-2bc$
⑤ $a^2+b^2+c^2+2bc$

해설

$(a-b+c)(a+b-c)$
$=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$
$=a^2-(b-c)^2$
$=a^2-b^2-c^2+2bc$

7. 다음 세 다항식에서 최대공약수를 구하면?

$2x^2-3x+1,\quad 3x^2-x-2,\quad x^2+3x-4$

① $x-1$ ② $2x-1$ ③ $x-2$
④ $x+3$ ⑤ $x+1$

해설
$2x^2-3x+1=(2x-1)(x-1)$
$3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$
$x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$
따라서 최대 공약수는 $x-1$이다.

8. $(1-3i)x+(3+2i)y=1+8i$를 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1-3i)x+(3+2i)y=1+8i$,
$(x+3y)+(-3x+2y)i=1+8i$ 에서
복소수의 상등에 의하여
$x+3y=1,\ -3x+2y=8$ 이고
연립하여 풀면 $y=1,\ x=-2$
$\therefore\ x+y=-1$

9. $x = \sqrt{3} + 2i$, $y = \sqrt{3} - 2i$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 5　　② 7　　③ $2\sqrt{3} + 4i$
④ 12　　⑤ $12 + 2\sqrt{3}i$

해설
$x + y = 2\sqrt{3}$,
$xy = (\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i) = 3 - 4i^2 = 7$ 이므로
$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 7 = 5$ 이다.

10. 복소수 $z = 1 - i$ 라고 할 때, $wz + 1 = \overline{w}$ 를 만족하는 복소수 w 의 실수부분을 구하면? (단, $\overline{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① -2 ② -1 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$w = a + bi$ 라 하면

$$\begin{aligned}(a+bi)(1-i)+1 &= a - ai + bi + b + 1 \\ &= (a+b+1) - (a-b)i \\ &= a - bi \text{ 에서}\end{aligned}$$

$a + b + 1 = a$, $\therefore\ b + 1 = 0$ 이므로 $b = -1$

$a - b = b$ 이므로 $a + 1 = -1$ 에서 $a = -2$

따라서 w 의 실수부분은 -2

11. 이차방정식 $3x^2+6x-2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값은?

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{20}{3}$ ③ 7 ④ 20 ⑤ -12

해설

$|\alpha-\beta| = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{60}}{3}$

$\therefore \quad (\alpha-\beta)^2 = |\alpha-\beta|^2 = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$

12. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$에서

$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$이므로

$a^2 + b^2 = 5$

13. 이차함수$y = -x^2 + 2x + 10$ 의 최댓값을 M , $y = 3x^2 + 6x - 5$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$y = -x^2 + 2x + 10$

$= -(x-1)^2 + 11$ 에서 $M = 11$

$y = 3x^2 + 6x - 5$

$= 3(x+1)^2 - 8$ 에서 $m = -8$

$\therefore M + m = 11 - 8 = 3$

14. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x의 범위가 $-2 \le x \le 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 6 ⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow \ y = (x-1)^2 - 3$
$-2 \le x \le 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,
$x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.
$\therefore$ 최댓값 : $(-2-1)^2 - 3 = 6$

15. 삼차방정식 $(x-1)(x-2)(x-3)=24$의 모든 실근의 합은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$(x-1)(x-2)(x-3)=24$를 전개하면

$x^3-6x^2+11x-30=0$

$x=5$를 대입하면 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 1 & -6 & 11 & -30 \\ & & 5 & -5 & 30 \\ \hline & 1 & -1 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-5)(x^2-x+6)=0$

$\therefore\ x=5$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{23}i}{2}$

따라서, 실근은 5뿐이므로 실근의 합은 5이다.

16. 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3+4x^2+3x-2) \div (\square x^2 + \square x + \square) = x+2$$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 1

▷ 정답: 2

▷ 정답: −1

해설

$\square x^2 + \square x + \square = A$라 하면
$(x^3+4x^2+3x-2) \div A = x+2$
$\therefore\ A = (x^3+4x^2+3x-2) \div (x+2)$
$\therefore\ A = x^2+2x-1$이므로
$\square$안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, −1이다.

17. 사차식 $3x^4-5x^2+4x-7$을 이차식 A로 나누었더니 몫이 x^2-2이고 나머지가 $4x-5$일 때, 이차식 A를 구하면?

① $3x^2-2$ ② $3x^2-1$ ③ $3x^2$
④ $3x^2+1$ ⑤ $3x^2+2$

해설

검산식 : $3x^4-5x^2+4x-7=A(x^2-2)+4x-5$

$A=\dfrac{3x^4-5x^2-2}{x^2-2}=3x^2+1$

18. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

해설

준 식은 $(a-b)^3$ 이다.
$a - b = 2004 - 2001 = 3$
$\therefore\ (a-b)^3 = 3^3 = 27$

19. 다음 중에서 겉넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24 인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$ ② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겉넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

대각선 : $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ $\therefore\ d = \sqrt{14}$

$= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

$= 6^2 - 22 = 14$

20. 사차식 $x^4 - 10x^2y^2 + 9y^4$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x-3y$ ② $x-2y$ ③ $x-y$

④ $x+y$ ⑤ $x+3y$

해설

$x^4 - 10x^2y^2 + 9y^4 = \left(x^2-9y^2\right)\left(x^2-y^2\right)$

$= (x-3y)(x+3y)(x-y)(x+y)$

21. 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립할 때, $x^2 - y^2$ 의 값은?

$$[(x+y)^n + (x-y)^n]^2 - [(x+y)^n - (x-y)^n]^2 = 4 \times 3^n$$

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 7 ⑤ 9

해설

$[(x+y)^n + (x-y)^n]^2 - [(x+y)^n - (x-y)^n]^2$

$= 4 \times 3^n$

$4\{(x+y)(x-y)\}^n = 4 \times 3^n$

$4(x^2 - y^2)^n = 4 \times 3^n$

$\therefore\ x^2 - y^2 = 3$

22. $2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$를 인수분해 하면$(x+ay+b)(2x+cy+d)$이다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-3y^2+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-(y-2)(3y+1)$
$=\{x-(y-2)\}\{2x+(3y+1)\}$
$=(x-y+2)(2x+3y+1)$
$\therefore\ a=-1, b=2, c=3, d=1$

23. 두 이차다항식의 최대공약수가 $x-2$이고, 최소공배수가 $x^3-6x^2+3x+10$일 때, 두 다항식의 합을 구하면? (단, 이차항의 계수는 모두 1이다.)

① $2x^2-6x+8$　② $2x^2-6x+7$　③ $2x^2-8x+8$
④ $2x^2-9x+10$　⑤ $2x^2+6x+9$

해설

구하는 두 다항식의 최대공약수가 $x-2$이므로
두 다항식은 $(x-2)a, (x-2)b$ (a, b는 서로소)
최소공배수 $(x-2)ab = x^3-6x^2+3x+10$
$= (x-2)(x+1)(x-5)$
그러므로 $a=x-5, b=x+1$
또는 $a=x+1, b=x-5$
따라서 두 다항식은
$(x-2)(x-5)=x^2-7x+10$,
$(x-2)(x+1)=x^2-x-2$
$\therefore$ 두 다항식의 합은 $2x^2-8x+8$

24. $f(x) = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{2010}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① -2 ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ $2i$

해설

$\dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{-2i}{2} = -i$

$\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2i}{2} = i$ 이므로

$f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$

$= f(-i) + f(i)$

$= \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2010} + \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2010}$

$= i^{2010} + (-i)^{2010}$

$= (i^4)^{502} \cdot i^2 + \left\{(-i)^4\right\}^{502} \cdot (-i)^2$

$= -1 + (-1) = -2$

25. 방정식 $x^2-[x]-4=0\ (0<x<4)$의 모든 근의 합은?

① $2\sqrt{6}$ ② $\sqrt{10}$ ③ 3 ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

이차방정식 $x^2-[x]-4=0$에서
(i) $0<x<1$일 때, $[x]=0$이므로
$x^2-4=0,\ (x+2)(x-2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$
그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.
(ii) $1\le x<2$일 때, $[x]=1$이므로
$x^2-5=0,\ (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0$
$\therefore x=-\sqrt{5}$ 또는 $x=\sqrt{5}$
그런데 $1\le x<2$이므로 해가 없다.
(iii) $2\le x<3$일 때, $[x]=2$이므로
$x^2-6=0,\ (x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})=0$
$\therefore x=-\sqrt{6}$ 또는 $x=\sqrt{6}$
그런데 $2\le x<3$이므로 $x=\sqrt{6}$
(iv) $3\le x<4$일 때, $[x]=3$이므로
$x^2-7=0,\ (x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})=0$
$\therefore x=-\sqrt{7}$ 또는 $x=\sqrt{7}$
그런데 $3\le x<4$이므로 해가 없다.
따라서 모든 근의 합은 $\sqrt{6}$

26. $x^2-2x+3=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$
$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$
$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$
$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$
$=9-6\cdot2+12=9$

27. x에 관한 이차방정식 $(m^2-1)x^2-2(m-1)x+3=0$이 중근을 갖도록 하는 m의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$(m^2-1)x^2-2(m-1)x+3=0$

(ⅰ) 이차방정식이므로 $m^2-1\neq 0$

$\therefore\ m\neq 1,-1$

(ⅱ) 중근을 가지려면 판별식 $D=0$

$\frac{D}{4}=(m-1)^2-3(m^2-1)=0$

$m^2-2m+1-3m^2+3=0$

$m^2+m-2=0$

$(m+2)(m-1)=0$

$\therefore\ m=1,-2$

$\therefore$(ⅰ)과 (ⅱ)에서 $m=-2$일 때만 중근을 갖는다.

28. x에 대한 이차방정식 $(a+1)x^2-4x+2=0$에 대하여 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a=1$일 때, 중근을 갖는다.

㉡ $a>1$일 때, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉢ $a<1$일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a \neq -1$일 때, 주어진 방정식은 이차방정식이다.
서로 다른 두 실근을 가질 때
$\frac{D}{4}=4-2(a+1)=2-2a>0$
$\therefore a<1$
따라서 $a<-1$ 또는 $-1<a<1$일 때,
서로 다른 두 실근을 갖는다.
중근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a=0$
$\therefore a=1$
따라서, $a=1$일 때, 중근을 갖는다.
서로 다른 두 허근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a<0$
$\therefore a>1$
따라서 $a>1$일 때 서로 다른 두 허근을 갖는다.

29. 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2+6x-1=0$
② $x^2-6x-1=0$
③ $x^2+x-6=0$
④ $x^2-x+6=0$
⑤ $x^2-x-6=0$

해설

근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$
$-2, 3$을 근으로 하는 이차방정식은
$(x+2)(x-3)=0$
$x^2-x-6=0$

30. $4x^2-8x+7$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(2x-2-\sqrt{3}i)(2x-2+\sqrt{3}i)$
② $(2x+2-\sqrt{3}i)(2x-2+\sqrt{3}i)$
③ $(x-2-\sqrt{3}i)(x+2+\sqrt{3}i)$
④ $(x-2-\sqrt{3}i)(x-2+\sqrt{3}i)$
⑤ $\left(x-\frac{2+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{3}i}{2}\right)$

해설

$x=\frac{4\pm\sqrt{16-28}}{4}=1\pm\frac{2\sqrt{3}i}{4}=1\pm\frac{\sqrt{3}i}{2}$

$4\left(x-1-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=(2x-2-\sqrt{3}i)(2x-2+\sqrt{3}i)$

31. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-i$일 때, 두 실수 $a,\ b$의 곱 ab의 값을 구하면?

① -20　② -12　③ 5　④ 12　⑤ 20

해설

한 근이 $2-i$이면 다른 한 근은 $2+i$
두 근의 합 : $4=-a$
두 근의 곱 : $5=b$
$\therefore\ ab=-20$

32. 다음 x의 이차방정식의 두 실근의 절댓값이 같고, 부호가 다르게 실수 m의 값을 정하면?

$3(x-1)(x-m)-x(7-m^2)=18-m^2$

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 근의 절댓값이 같고 부호가 다를 조건은
$\alpha+\beta=0,\ \alpha\beta<0$
준식을 x에 관해서 정리하면,
$3x^2+(m^2-3m-10)x+m^2+3m-18=0$
따라서, $\alpha+\beta=\dfrac{-(m^2-3m-10)}{3}=0,$
즉 $m^2-3m-10=0$
$(m-5)(m+2)=0 \quad \therefore\ m=5,\ -2 \ \cdots\cdots㉠$
$\alpha\beta=\dfrac{m^2+3m-18}{3}<0,\ m^2+3m-18<0$
$(m-3)(m+6)<0 \quad \therefore\ -6<m<3 \ \cdots\cdots㉡$
㉠, ㉡의 공통범위에 의해 $m=-2$

33. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 를 만족하는 실수 해의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 구하여라.

▶ 답: ＿＿＿ 개

▷ 정답: 1개

해설

$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 & \cdots ㉠ \\ (x-y)^2 + y^2 = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2 - (y-3)^2 = 0$

$(x+y-3)(x-y+3) = 0$

$y = x+3$ 또는 $y = -x+3$

i) $y = -x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$\therefore\ x = 2$이 때, $y = 1$

ii) $y = x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 + 2x + 4 = 0$

$\therefore\ x = -1 \pm \sqrt{3}i$

이 때, $y = 2 \pm \sqrt{3}i$

i), ii) 에서 실수해의 순서쌍은 $(2,\ 1)$이다.

따라서 실수해의 순서쌍의 개수는 1개이다.

34. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.
㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$
㉠에 대입하여 정리하면
$x^2+3x+2=0$
$(x+1)(x+2)=0$
$\therefore\ x=-1,\ -2$
$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$
$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

35. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x + y = u$, $xy = v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 25 \\ v = 12 \end{cases}$$

$\therefore\ u = \pm 7,\ v = 12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x + y = 7 & \cdots ㉢ \\ xy = 12 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} x + y = -7 & \cdots ㉣ \\ xy = 12 & \cdots ㉡ \end{cases}$

(ⅰ) ㉢, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2 - 7t + 12 = 0$ 의 두 근이므로 $x = 3,\ y = 4$ 또는 $x = 4,\ y = 3$

(ⅱ) ㉣, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2 + 7t + 12 = 0$ 의 두 근이므로 $x = -3,\ y = -4$ 또는 $x = -4,\ y = -3$

(ⅰ), (ⅱ)로부터 구하는 모든 해의 합은 0

36. 2가 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}$의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=k$라 하면

$ax^2+4x+b=k(x-2)$

$ax^2+(4-k)x+b+2k=0$

x에 대한 항등식이므로

$a=0$

$4-k=0$에서 $k=4$

$b+2k=0$에서 $b=-8$

$\therefore\ a-b=8$

해설

주어진 식이 모든 x에 대해 일정한 값을 가지려면

분자인 ax^2+4x+b가 분모인 '$x-2$' 만을 인수로 가져야 한다.

즉, 분자가 $k(x-2)$가 되어야 한다.

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=\dfrac{4(x-2)}{x-2}=4$

$\therefore a=0,\ b=-8$에서 $a-b=8$

37. 모든 실수 x에 대하여 $x^{10}+1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}\cdots$①

양변에 $x=2$을 대입하면

$2^{10}+1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}\cdots$②

①+②에 의해

$2^{10}+2=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})$

$\therefore (a_0+a_2+\cdots+a_{10})=2^9+1=513$

38. 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+2,\ xf(x)+2$가 모두 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어질 때, $f(1)$의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$$\begin{cases} f(x)=(x-\alpha)Q(x)-2 \ \cdots ㉠ \\ xf(x)=(x-\alpha)Q'(x)-2 \ \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ $\times x =$ ㉡에서

$$\begin{aligned} xf(x) &= (x-\alpha)Q(x)-2x \\ &= (x-\alpha)Q(x)-2(x-\alpha)-2\alpha \\ &= (x-\alpha)\{Q(x)-2\}-2\alpha \end{aligned}$$

$\therefore\ -2\alpha=-2$

$\therefore\ \alpha=1$

$\therefore\ f(x)=(x-1)Q(x)-2$

$\therefore\ f(1)=-2$

해설

$f(x)+2,\ xf(x)+2$가 모두 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지므로

$f(\alpha)+2=0\ \therefore\ f(\alpha)=-2\cdots$①

$\alpha f(\alpha)+2=0\cdots$②

①, ②에서 $\alpha=1$

$\therefore\ f(1)=f(\alpha)=-2$($\because$ ①)

39. 이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근의 차가 2가 되는 q의 최솟값은 ?

① 5　② 4　③ 3　④ 2　⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+2$라고 하면

$|\alpha+2-\alpha| = \dfrac{\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}}{1} = |2|$

$\sqrt{p^2+8p+16-4q+8} = 2$

양변을 제곱하여 q에 관해 정리하면

$4 = p^2+8p+16-4q+8,\ 4q = p^2+8p+20$

$q = \dfrac{1}{4}p^2+2p+5 = \dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta = p+4, \alpha\beta = q-2$

두 근의 차가 2이므로

$|\alpha-\beta| = \sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} = 2$

$\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)} = 2$

양변을 제곱하면

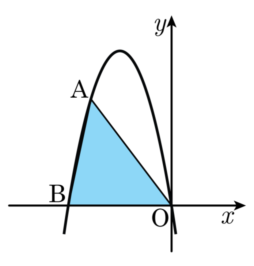
$(p+4)^2-4(q-2) = 4$

q에 대해 정리하면

$q = \dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

40. 다음 그림은 축의 방정식이 $x = -3$ 인 이차 함수 $y = -x^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle$OAB 의 넓이의 최댓값은?



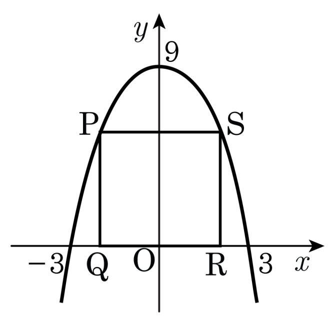
① 18 ② 27 ③ 36

④ 45 ⑤ 54

해설

축이 $x = -3$ 이므로 B 의 좌표는$(-6,\ 0)$ 이다.
따라서 $y = -x^2 + bx + c$ 가 두 점
$(0,\ 0)$, $(-6,\ 0)$ 을 지나므로,
$0 = c,\ 0 = -36 - 6b$
$b = -6,\ c = 0$
$y = -x^2 - 6x = -(x+3)^2 + 9$
$\triangle$OAB 에서 밑변의 길이를 $\overline{\mathrm{OB}}$ 라
고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle$OAB 의
넓이가 최대가 된다.
즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 9)$ 이므로
$\triangle$OAB 의 넓이$= \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OB}} \times 9 = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$

41. 다음의 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 에 내접하는 직사각형 PQRS 가 있다. PQRS 의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

먼저 이차함수의 식을 구하면
$(0, 9)$ 를 지나므로 $y = mx^2 + 9$,
$(3, 0)$ 을 지나므로 $y = -x^2 + 9$
$\mathrm{R}(a, 0)$ 이라 하면 (단, $0 < a < 3$), $\mathrm{S}(a, -a^2 + 9)$
직사각형의 가로는 $2a$, 세로는 $-a^2 + 9$
둘레는 $2\{2a + (-a^2 + 9)\} = -2(a - 1)^2 + 20$
따라서 둘레의 최댓값은 20

42. 오차방정식 $x^5-3x^4+x^3+x^2-3x+1=0$의 허근을 α ,β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

방정식 $x^5-3x^4+x^3+x^2-3x+1=0$에서
$(x+1)(x^4-4x^3+5x^2-4x+1)=0$
$\therefore\ x+1=0$ 또는
$x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$
(i) $x+1=0$에서 $x=-1$
(ii) $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$의 양변을
x^2 으로 나누면

$$x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(s^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5$$

$$=0\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$$

이 때, $x+\frac{1}{x}=t$로 치환하면
$t^2-4t+3=0,\ (t-1)(t-3)=0$
$\therefore\ t=1$ 또는 $t=3$

①$x+\frac{1}{x}=1$일 때, $x^2-x+1=0$

$$\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

②$x+\frac{1}{x}=3$일 때, $x^2-3x+1=0$

$$\therefore\ x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

따라서, 주어진 방정식의
두 허근이 $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로
두 허근 $\alpha,\ \beta$의 합은
$\alpha+\beta=1$이다.

43. $x^4 + 2x^3 + (a-1)x^2 - 2x - a = 0$의 네 근이 모두 실수가 되도록 실수 a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x^4 + 2x^3 + (a-1)x^2 - 2x - a = 0$에서 $x = 1, x = -1$일 때 성립하므로

인수정리와 조립제법을 이용하면

(좌변) $= (x-1)(x+1)(x^2 + 2x + a) = 0$

따라서 모두 실근이 되려면

$x^2 + 2x + a = 0$의 $\frac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로

$1^2 - 1 \cdot a \geq 0 \quad \therefore a \leq 1$

따라서 a의 최댓값은 1이다.

44. 두 방정식 $x^2-(k+2)x+2k=0$, $x^2+kx-2k=0$을 동시에 만족하는 x의 값이 존재할 때, 상수 k의 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

공통인 근을 α라 하면
$\alpha^2-(k+2)\alpha+2k=0$
$\alpha^2+k\alpha-2k=0$
두 식을 더하면
$2\alpha^2-2\alpha=0$, $\alpha(\alpha-1)=0$
$\alpha=0$ 이면 $k=0$
$\alpha=1$ 이면 $k=1$
$\therefore$ $k=1$ 또는 0

해설

㉠ : $x^2-(k+2)x+2k=0$에서 $(x-k)(x-2)=0$
㉡ : $x^2+kx-2k=0$
i) $x=k$ 가 ㉡의 해일 때
$k^2+k^2-2k=0$,
$k^2-k=0$
$k=1$ 또는 $k=0$
ii) $x=2$가 ㉡의 해일 때
$4+2k-2k=0$, $4=0$ 성립하지 않는다.
$\therefore$ $k=1$ 또는 0

45. x, y가 정수일 때 방정식 $xy - x - 2y - 2 = 0$을 만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 6개

해설

$xy - x - 2y - 2 + 4 = 4$

$x(y-1) - 2(y-1) = (x-2)(y-1) = 4$

따라서

$x - 2 = 1$, $y - 1 = 4$일 때, $x = 3$, $y = 5$

$x - 2 = 2$, $y - 1 = 2$일 때, $x = 4$, $y = 3$

$x - 2 = 4$, $y - 1 = 1$일 때, $x = 6$, $y = 2$

$x - 2 = -1$, $y - 1 = -4$일 때, $x = 1$, $y = -3$

$x - 2 = 4$, $y - 1 = -1$일 때, $x = 6$, $y = 0$

$x - 2 = 1$, $y - 1 = 4$일 때, $x = 3$, $y = 5$

따라서 순서쌍은 $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$, $(1, -3)$, $(6, 0)$, $(3, 5)$로 모두 6개이다.

46. 복소수 α의 실수부가 양이고, $\alpha^3 = i$일 때, $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$의 값을 구하면? (단, $i^2 = -1$)

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$　　④ 2　　⑤ $\sqrt{5}$

해설

$\alpha = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수)라 하면

$\alpha^3 = (a+bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i = i$

$a(a^2 - 3b^2) = 0 \cdots ㉠$

$b(3a^2 - b^2) = 1 \cdots ㉠$

$a > 0$ 이므로 $a^2 = 3b^2$ 을 ㉡에 대입하면

$b(9b^2 - b^2) = 1,\ 8b^3 = 1$

$\therefore\ b = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a = \sqrt{3}b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$\therefore\ \alpha + \dfrac{1}{\alpha} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) + \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i} = \sqrt{3}$

47. a, b가 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$중 하나일 때, 등식 $\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} = -\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

① 4개　② 5개　③ 6개　④ 7개　⑤ 8개

해설

$\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} = -\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$ 를 만족시키는 조건은

ⅰ) $a+b=0$ 이고 $a-b \neq 0$

ⅱ) $a-b<0$ 이고 $a+b>0$

ⅰ)의 경우 $(-2,\ 2)\ (2,\ -2)\ (-1,\ 1)\ (1,\ -1)$

ⅱ)의 경우 $(-1,\ 2)\ (0,\ 2)\ (0,\ 1)\ (1,\ 2)$

$\therefore$ 모두 8개

48. $-1 \le \frac{p}{2} \le 0$, $p+2q \le 2$ 를 만족하는 실수 p, q 에 대하여 이차함수 $y=x^2+px+q$ $(0 \le x \le 1)$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{4}$

해설

$y=x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$

이 때 $-1 \le \frac{p}{2} \le 0$ 에서 $0 \le -\frac{p}{2} \le 1$ 이므로

최솟값 m 은 $x=-\frac{p}{2}$ 일 때이다.

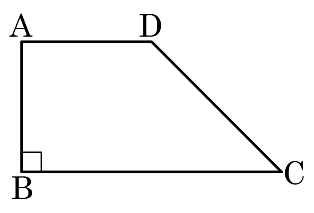
$\therefore\ m=q-\frac{p^2}{4}$

또한 $p+2q \le 2$ 에서 $q \le -\frac{p}{2}+1$

$\therefore\ m \le -\frac{p^2}{4}-\frac{p}{2}+1=-\frac{1}{4}(p+1)^2+\frac{5}{4}$

따라서 m 의 최댓값은 $\frac{5}{4}$ 이다.

49. 다음 그림의 사다리꼴 ABCD 에서 $\angle B = 90°$, $\angle C = 45°$, $\overline{AB} + \overline{BC} = 18$ 일 때, 이 사다리꼴의 최대 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 54

해설

꼭짓점 D 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 변 AB 의 길이를 x 라 하면 $\triangle DHC$ 는 이등변삼각형이고 변 BC 의 길이는 $18 - x$ 이다.

$\overline{AB} = \overline{DH} = \overline{HC} = x$

$\overline{AD} = \overline{BH} = 18 - x - x = 18 - 2x$

사다리꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\{(18 - 2x) + (18 - x)\} \times x \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + 18x \\ &= -\frac{3}{2}(x - 6)^2 + 54 \end{aligned}$$

따라서 $x = 6$ 일 때, 사다리꼴 넓이의 최댓값은 54 이다.

50. 같은 반원에 평행인 현 C_1, C_2, C_3 가 있다. 길이가 각각 20, 16, 8 이고, C_1 과 C_2 의 거리와 C_2 와 C_3 의 거리가 같을 때, 이 원의 반지름은?

① 12

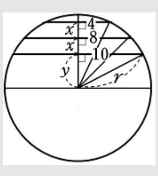
② $4\sqrt{7}$

③ $\frac{5\sqrt{65}}{3}$

④ $\frac{5\sqrt{22}}{2}$

⑤ 주어진 조건만으로는 알 수 없다.

해설



그림과 같이 3 개의 직각삼각형에서

$r^2 = y^2 + 10^2 \cdots\cdots$①

$r^2 = (x+y)^2 + 8^2 \cdots\cdots$②

$r^2 = (2x+y)^2 + 4^2 \cdots\cdots$③

② − ① : $0 = 2xy + x^2 - 36 \cdots\cdots$④

③ − ② : $0 = 2xy + 3x^2 - 48 \cdots\cdots$⑤

⑤ − ④ : $0 = 2x^2 - 12 \quad \therefore x = \sqrt{6}$

이것을 ④ 또는 ⑤에 대입하면 $y = \frac{15}{\sqrt{6}}$

$\therefore \quad r = \sqrt{y^2 + 10^2} = \frac{5\sqrt{22}}{2}$