1. 세 실수 a, b, c에 대하여 다음 중 항상 옳은 것은?

① $a > b$ 이면 $a^2 > b^2$

② $a > b$ 이면 $a - c < b - c$

③ $a < b < 0$ 이면 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

④ $ac > bc$ 이면 $a > b,\ c > 0$

⑤ $a^2 + b^2 + c^2 \leqq ab + bc + ca$

해설

① $a > 0 > b$인 경우에서 $|b| > |a|$라면 제곱 값에 대해서는 $b^2 > a^2$의 결과가 나온다.

② 부등식의 기본 성질로 양변에 같은 수를 빼서는 부호가 바뀌지 않는다.

④ $a > b, c > 0$이면 $ac > bc$일 수는 있으나 보기 ④번 같은 경우에는 $ac > bc$이면$a < b, c < 0$인 경우도 있기 때문에 성립하지 않는다.

⑤ 주어진 식의 양변에 2를 곱하고 좌변으로 몰아 정리하면

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \leqq 0$

$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \leqq 0$

$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leq 0$ 위와 같이 되므로 세 실수 사이의 관계가

$a - b = 0,\ b - c = 0,\ c - a = 0$을 성립하지 않으면 성립하지 않는 보기이다.

2. $-2 \le x \le 3$일 때, $3x-1$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$-2 \le x \le 3$에서 $-6 \le 3x \le 9$, $-7 \le 3x-1 \le 8$
따라서, 최댓값은 8이고 최솟값은 -7이므로 두 값의 합은 1이다.

3. 부등식 $3x+2 \geq 8$을 풀면?

① $x \geq -2$ ② $x \geq -1$ ③ $x \geq -\frac{1}{2}$

④ $x \geq \frac{3}{2}$ ⑤ $x \geq 2$

해설

$3x+2 \geq 8,\ 3x \geq 6 \quad \therefore x \geq 2$

4. 부등식 $ax+1>3x+2a$의 해가 $x<1$일 때, a의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$(a-3)x>2a-1$이므로
먼저 $a=3$인 경우를 생각하면
(좌변)$=0$, (우변)$=5$가 되어 부등식이 성립하지 않는다.
따라서 $a\neq 3$인 경우만 생각하면 된다.

(i) $a>3$이면 $x>\dfrac{2a-1}{a-3}$이 되어 $x<1$의 형태가 될 수 없다.

(ii) $a<3$이면 $x<\dfrac{2a-1}{a-3}=1$에서 $2a-1=a-3$ $\therefore a=-2$

5. 연립부등식 $\begin{cases} x-4<2x+1 \\ 3x+6\geq -1+4x \end{cases}$ 를 풀어라.

① $5<x\leq 7$ ② $-5<x,\ 7\leq x$ ③ $-5<x\leq 7$

④ $-7\leq x<5$ ⑤ $-7\leq x<-5$

해설

$\begin{cases} x-4<2x+1 \\ 3x+6\geq -1+4x \end{cases}$ $\begin{cases} x>-5 \\ x\leq 7 \end{cases}$

$\therefore\ -5<x\leq 7$

6. 연립부등식 $-2 < 3x + 4 \leq 11$ 을 만족하는 정수를 모두 구하여라.

① $-1,\ 0,\ 1$　② $0,\ 1,\ 2$　③ $-1,\ 0,\ 1,\ 2$

④ $-2,\ -1,\ 0,\ 1$　⑤ $0,\ 1,\ 2,\ 3$

해설

$$\begin{cases} -2 < 3x + 4 \\ 3x + 4 \leq 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \leq \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

따라서 $-2 < x \leq \dfrac{7}{3}$ 을 만족하는 정수는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ 이다.

7. 다음 연립부등식을 만족하는 정수의 개수가 10 개일 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 7x + 4 > 5x \\ 15 - x > a \end{cases}$$

① 3, 4 ② 5, 6 ③ 6 ④ 6, 7 ⑤ 4, 5, 6

해설

$7x + 4 > 5x$

$\therefore\ x > -2$

$15 - x > a$

$\therefore\ x < 15 - a$

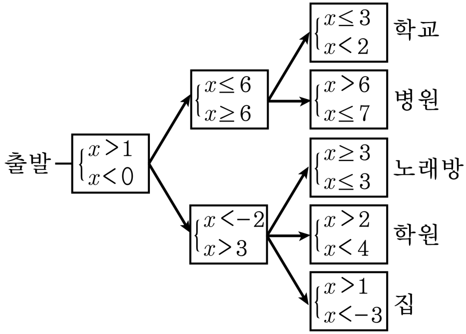
만족하는 정수는 10 개이므로 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ 이다.

$8 < 15 - a \le 9$

$6 \le a < 7$

$\therefore\ a = 6$

8. 출발점의 연립부등식과 같은 해의 형태를 갖는 방향으로 갈 때, 도착하는 곳은 어디인지 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 집

해설

$\begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases}$ 은 해가 없다. 따라서 해가 없는 것을 따라 가야 한다.

$\begin{cases} x \le 6 \\ x \ge 6 \end{cases}$ 의 해는 $x = 6$ 이므로 해가 있다.

$\begin{cases} x < -2 \\ x > 3 \end{cases}$ 의 해는 없다. 따라서 이쪽으로 가고, $\begin{cases} x \ge 3 \\ x \le 3 \end{cases}$ 의 해는 $x = 3$ 이다. $\begin{cases} x > 2 \\ x < 4 \end{cases}$ 의 해는 $2 < x < 4$ 이고 $\begin{cases} x > 1 \\ x < -3 \end{cases}$ 은 해가 없으므로 마지막 집을 향해 가고 있음을 알 수 있다

9. 연립부등식 $\begin{cases} 4x-2 \ge -10 \\ 6-x > 3 \end{cases}$ 의 해가 $a \le x < b$ 일 때, 상수 $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$6-x > 3 \rightarrow x < 3$

$4x-2 \ge -10 \rightarrow x \ge -2$

$\therefore\ a+b = -2+3 = 1$

10. 어떤 정수에서 10 을 빼고 5 배 하면 20 보다 크고, 어떤 정수에 2 배를 하고 4 를 빼면 28 보다 작다고 한다. 어떤 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

어떤 정수를 x 라고 하고 문제의 조건을 이용하여 두 개의 식을 만들어 본다. '어떤 정수에서 10 을 빼고 5 배하면 20 보다 크고' 를 식으로 표현하면, $5(x-10) > 20$ 이고, '어떤 정수에 2 배를 하고 4 를 빼면 28 보다 작다' 를 식으로 표현하면, $2x-4 < 28$ 이다.

두 개의 부등식을 연립부등식으로 표현하면, $\begin{cases} 5(x-10) > 20 \\ 2x-4 < 28 \end{cases}$

이다. 이를 간단히 하면, $\begin{cases} x > 14 \\ x < 16 \end{cases}$ 따라서 $14 < x < 16$ 이다.

x 는 정수이므로 15 이다.

11. 부등식 $|x-1|+|x-2|<3$ 을 풀면?

① $-1<x<4$ ② $-1<x<2$ ③ $0<x<1$

④ $0<x<2$ ⑤ $0<x<3$

해설

(i) $x<1$일 때

$-(x-1)-(x-2)<3,\ -2x<0\ \ \therefore x>0$

그런데 $x<1$이므로 $0<x<1$

(ii) $1\le x<2$일 때

$(x-1)-(x-2)<3,\ 0\cdot x<2$

$\therefore$ 모든 x에 대해 성립

그런데 $1\le x<2$이므로 $1\le x<2$

(iii) $x\ge 2$일 때

$(x-1)+(x-2)<3,\ 2x<6\ \ \therefore x<3$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x<3$

(i), (ii), (iii)에서 $0<x<3$

12. 부등식 $|7-3x|>2$를 풀면?

① $x<\frac{5}{3}$ 또는 $x>3$
② $x<\frac{5}{2}$ 또는 $x>2$
③ $x<\frac{5}{4}$ 또는 $x>4$
④ $x<1$ 또는 $x>3$
⑤ $x<\frac{5}{6}$ 또는 $x>6$

해설

$|7-x|>2$ 에서

$7-3x>2$ 또는 $7-3x<-2$

$-3x>-5$ 또는 $-3x<-9$

$\therefore x<\frac{5}{3}$ 또는 $x>3$

13. 이차부등식 $x^2+2x-35<0$을 풀면?

① $-15<x<12$ ② $-15<x<5$ ③ $-7<x<5$

④ $-7<x<2$ ⑤ $-5<x<7$

해설

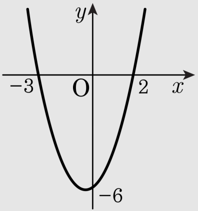
$x^2+2x-35<0$에서 $(x+7)(x-5)<0$

$\therefore -7<x<5$

14. 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식 $x^2 + x - 6 > 0$을 풀면?

① $x < -3$ 또는 $x > 2$
② $x < -2$ 또는 $x > 3$
③ $x < -1$ 또는 $x > 4$
④ $x < 0$ 또는 $x > 5$
⑤ $x < 1$ 또는 $x > 6$

해설



이차방정식 $x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $(x+3)(x-2) = 0$

$\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$

$f(x) = x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

이차부등식 $f(x) > 0$의 해는 $x < -3$ 또는 $x > 2$

15. 연립부등식 $\begin{cases} 3x^2+4x-4 \ge 0 \\ (x+1)^2 < 4 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 < x \le -1,\ \dfrac{2}{3} < x < 1$

② $-1 < x \le -3,\ \dfrac{2}{3} \le x < 2$

③ $-2 < x \le 0,\ \dfrac{1}{3} < x < 1$

④ $-3 < x \le -2,\ \dfrac{2}{3} \le x < 1$

⑤ $-4 < x \le -2,\ \dfrac{1}{3} < x < 1$

해설

$$\begin{cases} 3x^2+4x-4 \ge 0 \cdots \text{(가)} \\ (x+1)^2 < 4 \cdots \text{(나)} \end{cases}$$

(가)에서 $(x+2)(3x-2) \ge 0$이므로

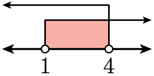
$x \le -2$ 또는 $x \ge \dfrac{2}{3}$

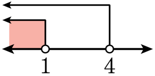
(나)에서 $-2 < x+1 < 2$,

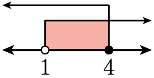
$-3 < x < 1$이므로

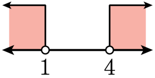
$-3 < x \le -2,\ \dfrac{2}{3} \le x < 1$

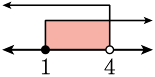
16. 연립부등식 $\begin{cases} 3 - x > -1 \\ 3x - 1 \geq 2 \end{cases}$ 의 해를 수직선에 바르게 나타낸 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

$3 - x > -1$, $x < 4$ 이고

$3x - 1 \geq 2$, $3x \geq 3$, $x \geq 1$ 이므로

$1 \leq x < 4$ 이다.

17. 연립부등식 $\begin{cases} 7-2x \geq -3 \\ 4x+6 > x \\ x-1 < 3 \end{cases}$ 을 만족하는 정수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$$\begin{cases} 7-2x \geq -3 \\ 4x+6 > x \\ x-1 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x > -2 \\ x < 4 \end{cases}$$

따라서 $-2 < x < 4$ 이므로 연립방정식을 만족하는 정수는 -1, 0, 1, 2, 3 으로 5 개 이다.

18. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-2) > 5x+2 \\ -2(x+7) \le 3x+21 \end{cases}$ 을 만족하는 해 중에서 가장 작은 정수와 가장 큰 정수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

$3x-6 > 5x+2$, $x < -4$ 이고 $-2x-14 \le 3x+21$, $5x \ge -35$, $x \ge -7$ 이므로 $-7 \le x < -4$ 이다.
따라서 가장 작은 정수는 -7 이고 가장 큰 정수는 -5 이므로 -12 이다.

19. 연립부등식 $\begin{cases} 2x - 11 < 5x + 7 \\ 3(x-1) \le 4(2-x) + 2 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 값 중 가장 큰 정수를 A , 가장 작은 정수를 B 라 할 때, $A + B$ 의 값을 구하면?

① -5 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설

i) $2x - 11 < 5x + 7$

$\Rightarrow \ x > -6$

ii) $3(x-1) \le 4(2-x) + 2$

$\Rightarrow \ 3x - 3 \le 8 - 4x + 2$

$\Rightarrow \ 3x + 4x \le 10 + 3$

$\Rightarrow \ x \le \dfrac{13}{7}$

$-6 < x \le \dfrac{13}{7}$ 이므로

$A = 1, \ B = -5$

$\therefore A + B = 1 + (-5) = -4$

20. 다음 연립부등식 $\begin{cases} 0.3x + 1.2 > 0.5x \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} < \frac{3}{4}x \end{cases}$ 를 만족하는 모든 정수 x 의 합은?

① 6 ② 3 ③ 1 ④ 0 ⑤ −2

해설

i) $0.3x + 1.2 > 0.5x$ 의 양변에 10 을 곱하면

$3x + 12 > 5x,\ \ x < 6$

ii) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} < \frac{3}{4}x$ 의 양변에 12 를 곱하면

$8x - 6 < 9x\ ,\ x > -6$

$\therefore\ -6 < x < 6$ 만족하는 정수는 −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 이고 이들의 합은 0 이다.

21. 연립부등식 $\begin{cases} 0.3x - 0.5 \le 0.4 \\ x - 3 > -2(9 + x) \end{cases}$ 를 만족하는 정수 x 는 모두 몇 개인가?

① 9 개 ② 8 개 ③ 7 개 ④ 6 개 ⑤ 5 개

해설

$$\begin{cases} 0.3x - 0.5 \le 0.4 \\ x - 3 > -2(9 + x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x \le 9 \\ 3x > -15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x > -5 \end{cases}$$

$\therefore \ -5 < x \le 3$

위의 범위를 만족하는 정수는 $-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ 이다.

22. 두 부등식 $0.3x+1.2>0.5x$, $\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}<\frac{3}{4}x$을 동시에 만족하는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 11 개

해설

$0.3x+1.2>0.5x$ 의 양변에 10을 곱하면

$3x+12>5x$

$3x-5x>-12$

$-2x>-12$

$x<6$

$\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}<\frac{3}{4}x$ 의 양변에 12 를 곱하면

$8x-6<9x$

$x>-6$

따라서 $-6<x<6$ 이고 정수는

$-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 의 11 개이다.

23. 부등식 $x-1 \leq 3x-7 < 14-x$ 의 해 중에서 정수인 해는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$x-1 \leq 3x-7 < 14-x$ 에서

(i) $x-1 \leq 3x-7$

$x-3x \leq -7+1$

$-2x \leq -6$

$\therefore\ x \geq 3$

(ii) $3x-7 < 14-x$

$3x+x < 14+7$

$4x < 21$

$\therefore\ x < \dfrac{21}{4}$

(i), (ii) 에서 $3 \leq x < \dfrac{21}{4}$ 따라서 정수인 해는 $3, 4, 5$ 로 3 개이다.

24. 연립부등식 $\begin{cases} 10-2x \ge 3x \\ x-a > -3 \end{cases}$ 이 해를 갖지 않도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a > 2$　② $a \le 2$　③ $a \ge 5$

④ $a \le 5$　⑤ $2 < a < 5$

해설

$$\begin{cases} 10-2x \ge 3x & \rightarrow \ 2 \ge x \\ x-a > -3 & \rightarrow \ x > a-3 \end{cases}$$

$a-3 \ge 2$

$\therefore \ a \ge 5$

25. 200 원짜리 자두와 500 원짜리 복숭아를 합하여 9 개를 사는데, 그 값이 2800 원 이상 3600 원 이하가 되게 하려고 한다. 복숭아는 최대 몇 개까지 살 수 있는가?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

자두의 개수 : $(9-x)$ 개 , 복숭아의 개수 : x 개

$2800 \le 200(9-x)+500x \le 3600$

$$\begin{cases} 2800 \le 200(9-x)+500x \\ 200(9-x)+500x \le 3600 \end{cases}$$

$\therefore \ \frac{10}{3} \le x \le 6$

따라서 살 수 있는 복숭아의 최대 개수는 6 개이다.

26. 부등식 $|x-1|+|x-3|<6$의 해와 같은 해를 갖는 이차부등식으로 옳은 것은?

① $x^2-4x-5<0$ ② $x^2-4x+3<0$

③ $x^2-6x+5<0$ ④ $x^2-4x+3\leqq 0$

⑤ $x^2-8x+15\leqq 0$

해설

(i) $x<1$일 때, $-x+1-x+3<6$

$x>-1 \quad \therefore -1<x<1$

(ii) $1\leq x<3$일 때, $x-1-x+3<6$

$2<6 \quad \therefore 1\leq x<3$

(iii) $x\geq 3$일 때, $x-1+x-3<6$

$x<5 \quad \therefore 3\leq x<5$

$\therefore -1<x<5$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-5)<0,\ x^2-4x-5<0$

27. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+2ax-4\geq 0$이 성립하지 않을 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $-4\leq a\leq 0$ ② $0\leq a<1$ 또는 $a>3$

③ $-4<a$ ④ $-4<a\leq 0$

⑤ $0\leq a\leq 4$

해설

모든 실수 x에 대해 주어진 식이 성립하지 않으려면
$a\leq 0$이고 $D/4=a^2+4a<0$이어야 한다.
따라서 $a(a+4)<0$이므로 $-4<a<0$이고
$a=0$일 때도 성립하지 않으므로 $-4<a\leq 0$

28. 이차부등식 $(k-1)x^2-2(k-1)x-2>0$이 해를 가지지 않도록 실수 k의 값의 범위는?

① $-1<k<1$ ② $-1\le k\le 1$ ③ $-1\le k<1$

④ $-2<k<1$ ⑤ $-2\le k\le 1$

해설

해를 가지지 않으므로 모든 실수 x에 대하여
$k-1<0$이고
$(k-1)x^2-2(k-1)x-2\ge 0$이어야 한다.
ⅰ) $k-1<0$에서 $k<1$
ⅱ) $(k-1)x^2-2(k-1)x-2=0$의 판별식을
D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2+2(k-1)\le 0,\ k^2-1\le 0$$

$$(k+1)(k-1)\le 0 \quad \therefore -1\le k\le 1$$

ⅰ), ⅱ)의 공통 범위를 구하면 $-1\le k<1$

29. 모든 실수 x에 대하여 x^2+ax+a가 -3보다 항상 크기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $-4<a<3$　② $-2<a<4$　③ $-2<a<6$

④ $2<a<4$　⑤ $2<a<6$

해설

$x^2+ax+a>-3, x^2+ax+(a+3)>0$
모든 실수 x에 대하여 성립하려면
이차방정식 $x^2+ax+(a+3)=0$의 판별식을
D라 할 때,
$D<0$이어야 하므로
$D=a^2-4(a+3)<0$
$a^2-4a-12<0, (a-6)(a+2)<0$
$\therefore -2<a<6$

30. 부등식 $ax^2+(a+1)x+a \geq 0$을 만족하는 실수 x가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a>1$　② $a<-\frac{1}{3}$　③ $a \geq -\frac{1}{3}$
④ $a \leq -\frac{1}{3}$　⑤ $-\frac{1}{3}<a<1$

해설

$ax^2+(a+1)x+a \geq 0$을 만족하는 실수가 존재하는 경우는
전체에서 모든 실수 x에 대하여
$ax^2+(a+1)x+a<0$인 경우를 제외하면 된다.
$ax^2+(a+1)x+a<0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면
$a<0 \cdots$ ㉠
또, 이차방정식 $ax^2+(a+1)x+a=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(a+10)^2-4a^2<0, \quad -3a^2+2a+1<0$
$3a^2-2a-1>0, \ (3a+1)(a-1)>0$
$\therefore a<-\frac{1}{3}$ 또는 $a>1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a<-\frac{1}{3}$

따라서 $ax^2+(a+1)x+a \geq 0$을 만족하는 실수가 존재하려면

$a \geq -\frac{1}{3}$이면 된다.

31. $a(x^2-2x+2)>2x$을 만족하는 x가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a \le 1-\sqrt{2}$　② $a \le 1$　③ $a \le 1+\sqrt{2}$

④ $0 < a \le 1$　⑤ $0 < a \le \sqrt{2}$

해설

모든 실수 x에서 $ax^2-2(a+1)x+2a \le 0$

ⅰ) $a \le 0$

ⅱ) $D/4=(a+1)^2-2a^2=-a^2+2a+1 \le 0$

$a^2-2a-1 \ge 0$

$\therefore a \le 1-\sqrt{2}$ 또는 $a \ge 1+\sqrt{2}$

$\therefore a \le 1-\sqrt{2}$

32. 부등식 $|x-2|<k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8| \le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k>0$)

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8| \le 8$을 풀면

$-8 \le x^2-8 \le 8$

$0 \le x^2 \le 16$

$\therefore -4 \le x \le 4$

$k>0$이므로 부등식 $|x-2|<k$ 을 풀면

$-k<x-2<k$

$-k+2<x<k+2$

이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8| \le 8$을 만족하려면

$-k+2 \ge -4,\ k+2 \le 4$이어야 하므로

$k \le 6,\ k \le 2$

$\therefore 0<k \le 2$

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

33. 두 부등식 $2x-1>0$, $(x+1)(x-a)<0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{2}<x<3$ 이 되도록 하는 정수 a의 값은? (단,$a>1$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}\cdots\cdots$ ①

$(x+1)(x-a)<0$

$\therefore -1<x<a\cdots\cdots$ ②

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2}<x<3$ 이므로

$\therefore a=3$

34. 이차부등식 $ax^2 - bx + c < 0$의 해가 $x < -1$ 또는 $x > 3$일 때, 이차부등식 $ax^2 + cx + b > 0$의 해는?

① $-2 < x < 1$
② $-1 < x < 0$
③ $1 < x < 2$
④ $1 < x < 3$
⑤ $2 < x < 5$

해설

$x < -1$ 또는 $x > 3$인 해를 갖는 이차항계수가
1인 이차부등식은 $(x+1)(x-3) > 0$이므로,
$ax^2 - bx + x < 0$의 a가 음수이고,
이 부등식은 $a(x+1)(x-3) < 0$과 같다.
따라서 $b = 2a,\ c = -3a$이고 주어진 부등식
$ax^2 - 3ax + 2a = a(x^2 - 3x + 2)$
$= a(x-2)(x-1) > 0$이 된다.
$a < 0$이므로 만족하는 해는 $(x-1)(x-2) < 0$에서
$1 < x < 2$

35. 이차방정식 $f(x)=0$의 두근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=6$이 성립한다. 이 때, 방정식 $f(5x-7)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0(a\neq 0)$에서

$f(5x-7)=a(5x-7-\alpha)(5x-7-\beta)=0$

$\therefore\ 5x=7+\alpha,\ 7+\beta$

$\therefore\ x=\dfrac{7+\alpha}{5},\ \dfrac{7+\beta}{5}$

따라서, 구하는 두 근의 합은

$\dfrac{14+\alpha+\beta}{5}=\dfrac{20}{5}=4$

36. x에 대한 이차방정식 $x^2-2kx-2k+3=0$이 두 실근을 가지도록 실수 k의 값의 범위를 정하면?

① $k \le -3$ 또는 $k \ge 1$
② $-3 \le k \le 1$
③ $k=-3$ 또는 $k=1$
④ $k<-3$ 또는 $k>1$
⑤ $-3<k<1$

해설

두 실근을 갖는다는 것은
서로 다른 두 실근 또는 중근을 갖는다는 것이므로
$D' = k^2-(-2k+3) \ge 0$
$k^2+2k-3 \ge 0$
$(k+3)(k-1) \ge 0$
$\therefore\ k \le -3$ 또는 $k \ge 1$

37. 어부 김씨는 둘레 길이가 28 cm 인 직사각형 모양의 양식장의 넓이를 $48\,\mathrm{m}^2$ 이상이 도도록 지으려고 한다. 이 때 양식장의 한 변의 길이를 최대 얼마로 해야 하는가?

① 5 m　　② 6 m　　③ 7 m　　④ 8 m　　⑤ 9 m

해설

양식장의 가로의 길이를 x m라고 하면
둘레의 길이는 28 m 이므로
세로의 길이는 $(14 - x)$ m 이다.
양식장의 넓이가 $48\,\mathrm{m}^2$ 이상이므로
$x(14 - x) \geq 48,\ 14x - x^2 - 48 \geq 0$
$x^2 - 14x + 48 \leq 0, (x - 6)(x - 8) \leq 0$
$\therefore 6 \leq x \leq 8$
따라서 한 변의 길이를 최대 8 m로 해야 한다.

38. 이차함수 $y=x^2-2x-3$ 의 그래프가 이차함수 $y=2x^2-2mx+1$ 의 그래프보다 항상 아래쪽에 존재하도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $-3<m<3$

② $-3\ m<1$

③ $-1<m<3$

④ $m<-1$또는$m>1$

⑤ $m<-1$또는$m>3$

해설

$x^2-2x-3<2x^2-2mx+1$ 에서

$x^2-2(m-1)x+4>0$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2(m-1)x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4}=(m-1)^2-4<0$ 에서

$(m+1)(m-3)<0$

$\therefore -1<m<3$

39. $1 \le x \le 2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax < 4 + x - x^2$이 항상 성립할 때, 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$ ② $a < 2$ ③ $a < 3$ ④ $a < 4$ ⑤ $a < 5$

해설

부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 에서 $x^2 + (a-1)x - 4 < 0$
$1 \le x \le 2$ 에서
이 부등식이 항상 성립해야 하므로
방정식 $x^2 + (a-1)x - 4 = 0$ 의 한 근이1 보다 작고, 다른 한 근은 2 보다 커야 한다.
$f(x) = x^2 + (a-1)x - 4$ 로 놓으면
$f(1) = 1 + (a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 4 \cdots$ ㉠
$f(2) = 4 + 2(a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a < 1$

40. 세 변의 길이가 $x-1,\ x,\ x+1$ 인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a<x<b$라 할 때, $a+b$의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$x-1,\ x,\ x+1$은 삼각형의 세 변이므로

$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$

$x-1+x>x+1$ $\therefore x>2 \cdots\cdots$ ①

한편, 둔각삼각형이 되려면 $(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$

$x^2-4x<0$에서 $0<x<4$ $\cdots\cdots$ ②

① 과 ② 에서 $2<x<4$

$\therefore\ a=2,\ b=4$

따라서 $a+b=6$

41. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1$, $a < 2$

ii) $f(1) > 0$, $1 - a + 9 > 0$, $a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D} = a^2 - 4 \cdot 9 \ge 0$, $a \ge 6$, $a \le -6$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \le -6$

$\therefore k = -6$

42. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

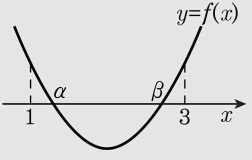
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$

$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \dfrac{13}{3}$

$\therefore\ a < \dfrac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$x = \dfrac{a}{2}$ 이므로 $1 < \dfrac{a}{2} < 3$

$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \dfrac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \dfrac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

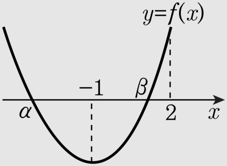
43. 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-1=0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha<-1<\beta<2$가 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $-2<a<0$　② $-2<a<1$　③ $0<a<2$

④ $1<a<2$　⑤ $1<a<3$

해설

$f(x)=x^2+2ax+a^2-1$ 로 놓으면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 되어야 한다.



즉, $f(-1)<0$, $f(2)>0$

(i) $f(-1)=1-2a+a^2-1<0$ 에서 $a^2-2a<0$, $a(a-2)<0$

$\therefore 0<a<2$

(ii) $f(2)=4+4a+a^2-1>0$ 에서 $a^2+4a+3>0$, $(a+3)(a+1)>0$

$\therefore a<-3$, $a>-1$

(i), (ii) 에서 $0<a<2$

44. $a-1<x<a+1$을 만족하는 모든 x가 $-1<x<3$을 만족할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $0<a<2$ ② $0 \le a \le 2$ ③ $a<0,\ a>2$

④ $a \le 0,\ a \ge 2$ ⑤ 구할 수 없다.

해설

$a-1 \ge -1$ 이고, $a+1 \le 3$ 이어야 하므로

$a \ge 0,\ a \le 2$

$\therefore\ 0 \le a \le 2$

45. 15% 의 설탕물 300 g 이 있다. 여기에서 200 g 의 설탕물을 버리고 물 x g 을 넣어 10% 이상 12% 이하의 농도를 만들려고 할 때, x가 될 수 없는 것은?

① 25 ② 32 ③ 39 ④ 47 ⑤ 52

해설

설탕물을 200 g 버려도 물과 설탕을 함께 버린 것 이므로, 농도에는 변화가 없다.
따라서 설탕물을 버린 후 남은 설탕물은 똑같은 15% 의 설탕물 100 g 이다.

이 때의 소금물의 양은 $\frac{15}{100} \times 100 = 15(\mathrm{g})$ 이다.

여기에 물 x g 을 넣어줄 때의 농도를 식으로 나타내면 $\frac{15}{100+x} \times 100$ 이다.

농도가 10% 이상 12% 이하가 되게 해야 하므로, $10 \leq \frac{15}{100+x} \times 100 \leq 12$ 이다.
이를 연립방정식으로 나타내면

$$\begin{cases} 10 \leq \dfrac{15}{100+x} \times 100 \\ \dfrac{15}{100+x} \times 100 \leq 12 \end{cases}$$

이고, 정리하면

$$\begin{cases} x \leq 50 \\ x \geq 25 \end{cases}$$

이다. 따라서 $25 \leq x \leq 50$ 이다.

46. $6[x]^2 - 31[x-1] - 13 < 0$을 풀면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3 \le x < 3$ ② $-2 \le x < 5$ ③ $0 \le x < 3$

④ $1 \le x < 5$ ⑤ $1 \le x < 6$

해설

$n \le [x] < n+1$에서

$n-1 < [x-1] < n$이므로

$[x-1] = [x] - 1$

$\therefore 6[x]^2 - 31[x-1] - 13$

$= 6[x]^2 - 31([x]-1) - 13$

$= 6[x]^2 - 31[x] + 18 < 0$

$\therefore (2[x]-9)(3[x]-2) < 0$

$\frac{2}{3} < [x] < \frac{9}{2}$

$\therefore 1 \le [x] \le 4$이므로

$[x] = 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$\therefore 1 \le x < 5$

47. 모든 실수 x에 대하여 $(|a|+a)x \geq a^2+a-20$이 성립할 때, 정수 a의 개수를 구하면?

① 9 개 ② 6 개 ③ 5 개 ④ 4 개 ⑤ 3 개

해설

$(|a|+a)x \geq a^2+a-20$에서
a의 부호에 따라 범위를 나누면,
① $a<0$: $|a|=-a$
$0 \cdot x \geq a^2+a-20$, $(a+5)(a-4) \leq 0$에서
$-5 \leq a \leq 4$
$\therefore\ -5 \leq a < 0$
② $a=0$: $0 \cdot x \geq -20$이므로, 항상 성립한다.
$\therefore\ a=0$
③ $a>0$: $|a|=a$
$2a \cdot x \geq a^2+a-20$, $x \geq \dfrac{1}{2a}(a^2+a-20)$
모든 x에 대해서 위 부등식이 성립할 수 없다.
$\therefore$ ①과 ②를 동시에 만족하는 a의 범위는 $-5 \leq a \leq 0$,
따라서 정수 a의 개수는 6 개

48. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$의 해가 $p < x < q$일 때, 이차부등식 $cx^2 + bx + a < 0$의 해를 p, q를 써서 나타내면? (단, $p > 0$)

① $x > q$ 또는 $x < p$

② $\frac{1}{q} < x < \frac{1}{p}$

③ $x > \frac{1}{p}$

④ $x < \frac{1}{q}$

⑤ $x > \frac{1}{p}$ 또는 $x < \frac{1}{q}$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $p < x < q$ 라면

$(a < 0$ 이므로$)$ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0$

$\Leftrightarrow (x - p)(x - q) < 0$, $x - (p + q)x + pq < 0$

$p + q = -\frac{b}{a},\ pq = \frac{c}{a}$

$cx^2 + bx + a < 0$ 에서 양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + 1 > 0$ $(\because a < 0)$

$\Leftrightarrow pqx^2 - (p + q)x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow (px - 1)(qx - 1) > 0$

$\therefore x > \frac{1}{p}$ 또는 $x < \frac{1}{q}$

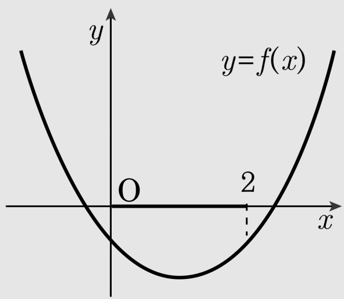
$\left(\because \frac{1}{p} > \frac{1}{q}\right)$

49. $0 \le x \le 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 이 항상 성립되게 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ -1

해설

$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 로 놓을 때
주어진 부등식의 해가 0, 2 를 포함 하려면
$f(0) \le 0,\ f(2) \le 0$ 이어야 한다.



$f(0) = a^2 - 4 \le 0$
$\therefore\ -2 \le a \le 2 \cdots$ ㉠
$f(2) = -2a + a^2 \le 0$
$\therefore\ 0 \le a \le 2 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위는 $0 \le a \le 2$
따라서 $M = 2,\ m = 0$ 이므로 $M - m = 2$

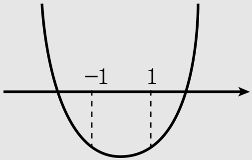
50. 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2p-1=0$ 의 두 근 중 한 근은 -1보다 작고, 다른 한 근은 1보다 크도록 실수 p의 범위를 정하면?

① $p > -\frac{1}{3}$　　② $p > 1$　　③ $-\frac{1}{3} < p < 1$

④ $p < -\frac{1}{3}$　　⑤ $p < 1$

해설

$f(x) = x^2-(p+1)x+2p-1$로 놓으면



i) $f(-1) = 1+p+1+2p-1 = 3p+1 < 0$

$\therefore p < -\frac{1}{3}$

ii) $f(1) = 1-p-1+2p-1 = p-1 < 0$

$\therefore p < 1$

i) ii)에서 $p < -\frac{1}{3}$