

1. 연립방정식 $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ xy - y^2 = 6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x = p, y = q$ 또는 $x = r, y = s$ 이다. $p + q + r + s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\begin{cases} x - 2y = 1 & \cdots \textcircled{㉠} \\ xy - y^2 = 6 & \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $x = 2y + 1 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$y^2 + y - 6 = 0(y - 2)(y + 3) = 0$$

$$\therefore y = 2, -3$$

$y = 2, y = -3$ 을 ㉢에 대입하면

$$\text{각각 } x = 5, x = -5$$

$$\therefore x = 5, y = 2 \text{ 또는 } x = -5, y = -3$$

2. $x = \alpha$, $y = \beta$ 가 연립방정식

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 \end{cases} \quad \text{의 해일 때, } \alpha^2 + \beta^2 \text{의 값은?}$$

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 & \dots \textcircled{1} \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 $\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} \times 2$ 하면

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, (x - 2y)(x - y) = 0,$$

$$x = 2y \text{ or } x = y$$

$x = 2y$ 를 $\textcircled{1}$ 식에 대입하면

$$4y^2 - 2y^2 - 2y^2 = -2, 0 = -2 \text{불능}$$

$x = y$ 를 $\textcircled{1}$ 식에 대입하면

$$y^2 - y^2 - 2y^2 = -2$$

$$y^2 = 1, y \pm 1, x \pm 1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 1 + 1 = 2$$

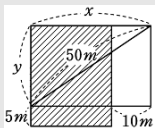
3. 대각선의 길이가 50m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5m 늘리고, 가로를 10m 줄이면 넓이가 50m^2 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ 답 : m

▷ 정답 : 48m

해설

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 $x\text{m}$, $y\text{m}$ 라 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots \textcircled{㉠} \\ (x - 10)(y + 5) = xy + 50 \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉡을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$$\therefore x = 2y + 20 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$(2y + 20)^2 + y^2 = 50^2$$

$$y^2 + 16y - 420 = 0$$

$$(y - 14)(y + 30) = 0$$

$$\therefore y = 14, -30$$

그런데 $0 < y < 50$ 이므로 $y = 14$

이것을 ㉢에 대입하면 $x = 48$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $y = -x + 2a$ 를 ②에 대입하면

$$x(-x + 2a) = a$$

$\therefore -x^2 + 2ax = a$ 즉 $x^2 - 2ax + a = 0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4 = a^2 - a = 0$

$\therefore a = 0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$$a = 1$$

5. 방정식 $2xy-4x-y=4$ 를 만족하는 양의 정수 x, y 를 구하면 $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$,

$$\begin{cases} x = \gamma \\ y = \delta \end{cases} \text{ 이다.}$$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$

조건에서 x, y 가 양의 정수이므로

$2x-1, y-2$ 도 각각 정수이고 특히 $2x-1$ 은 양의 홀수이다.

$$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma + \delta = 15$$