1. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해하였더니, $(x+ay)(x-by+c)$가 되었다. 이 때, $a,\ b,\ c$를 순서대로 쓴 것은?

① $-1,\ 0,\ 1$ ② $-1,\ 1,\ 2$ ③ $-2,\ -1,\ 1$

④ $-1,\ -1,\ -2$ ⑤ $-1,\ 2$

해설

$$x^2-2x-y^2+2y=(x+y)(x-y)-2(x-y)$$
$$=(x-y)(x+y-2)$$

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ c=-2$

2. $(x^2+x)(x^2+x+1)-6$을 인수분해하면?

① $(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$ ② $(x-1)(x+2)(x^2+x-3)$

③ $(x-2)(x+1)(x^2+x+3)$ ④ $(x-1)(x+2)(x^2-x+3)$

⑤ $(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

해설

$x^2+x=X$라 하자.

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= X(X+1)-6 \\ &= X^2+X-6 \\ &= (X+3)(X-2) \\ &= (x^2+x+3)(x^2+x-2) \\ &= (x-1)(x+2)(x^2+x+3)\end{aligned}$$

3. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -2이고, $x-2$로 나눈 나머지가 1일 때, $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나눈 나머지는?

① $2x+1$　② $x+1$　③ $x-1$

④ $2x-1$　⑤ $3x+2$

해설

$f(x)=(x+1)Q_1(x)-2$

$f(x)=(x-2)Q_2(x)+1$

$f(x)=(x+1)(x-2)Q_3(x)+ax+b$

$f(-1)=-a+b=-2,\ f(2)=2a+b=1$

$\therefore\ a=1,\ b=-1$

구하는 나머지는 $x-1$

4. 복소수 z의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, 등식 $(1-i)\bar{z}+2iz=3-i$를 만족시키는 z를 구하면?

① $3-2i$ ② $-3+i$ ③ $3+i$

④ $-3-2i$ ⑤ $3-i$

해설

복소수 $z=x+yi(x,\ y$ 는 실수$)$라 놓으면

$\bar{z}=x-yi$

따라서, 주어진 식은

$(1-i)(x-yi)+2i(x+yi)=3-i$

$x-yi-xi-y+2xi-2y=3-i$

$(x-3y)+(x-y)i=3-i$

복소수의 상등에 의하여 $x-3y=3$, $x-y=-1$

$\therefore\ \ x=-3,\ y=-2$

$\therefore\ \ z=-3-2i$

5. $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} + \sqrt{-18} \div \sqrt{-6}$ 을 간단히 하면?

① $-3\sqrt{3}$ ② $-2\sqrt{3}$ ③ $-\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

(주어진 식) $= \sqrt{3}i \times 2i + \sqrt{18}i \times \dfrac{1}{\sqrt{6}i}$

$= -2\sqrt{3} + \sqrt{3} = -\sqrt{3}$

6. 다음 중 이차함수 $y = x^2 - 2(a+b)x + ab$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은? (단,a, b 는 실수)

① 항상 x 축과 만난다.

② 항상 x 축과 만나지 않는다.

③ a, b 가 양의 실수일 때, x 축과 두 점에서 만난다.

④ a, b 가 음의 실수일 때, x 축과 접한다.

⑤ a, b 가 음이 아닌 실수일 때, x 축과 만나지 않는다.

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(a+b)x + ab$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 개수는 이차방정식 $x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$ 의 실근의 개수와 같다.
이차방정식 $x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2$$

$= \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$ 이므로 임의의 실수 a, b 에 대하여 항상 실근을 갖는다.
따라서, 이차함수 $y = x^2 - 2(a+b)x + ab$ 의 그래프는 항상 x 축과 만난다.

7. $a^2 = 3$일 때, 다음 식의 값을 구하면?

$P = \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2$

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$(2+a)^n = \alpha,\ (2-a)^n = \beta$로 놓으면

$$\begin{aligned} P &= \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2 \\ &= (\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 = 4\alpha\beta \\ &= 4(2+a)^n(2-a)^n = 4(4-a^2)^n \\ &= 4(4-3)^n = 4 \end{aligned}$$

8. 자연수 n에 대해 $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$ 라 하자. x가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

① $2i$ ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$x = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right\}^n + \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2\right\}^n$$

$$= \left(\frac{2}{2i}\right)^n + \left(\frac{2}{-2i}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{i}\right)^n + \left(-\frac{1}{i}\right)^n = (-i)^n + i^n$$

i^n 은 $n = 4k$, $n = 4k+1$, $n = 4k+2$, $n = 4k+3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n = 4k$ 이면 $x = 1+1 = 2$

(ii) $n = 4k+1$ 이면 $x = -i+i = 0$

(iii) $n = 4k+2$ 이면 $x = -1-1 = -2$

(iv) $n = 4k+3$ 이면 $x = i-i = 0$

$\therefore\ x = 2,\ 0,\ -2$

따라서, x가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

9. 이차방정식 $ax^2+(a-3)x-2a=0$의 두 근의 차가 $\sqrt{17}$이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

해설

$ax^2+(a-3)x-2a=0$의 두 근을 α, β라 하면,

$\alpha+\beta=-\dfrac{a-3}{a}$, $\alpha\beta=-2$

문제의 조건에서 $|\alpha-\beta|=\sqrt{17}$

$\therefore\ 17=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=\left(\dfrac{a-3}{a}\right)^2+8$

$\therefore\ \left(\dfrac{a-3}{a}\right)^2=9,\ 8a^2+6a-9=0$

따라서, a의 값들의 합은 $-\dfrac{3}{4}$

10. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ 의 그래프와 $g(x) = 3x - 4$ 의 그래프가 서로 다른 세 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 에서 만난다고 한다. 이 때 $y_1 + y_2 + y_3$ 의 값은?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

x_1, x_2, x_3 는 방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + b = 3x - 4$

즉 $x^3 - 2x^2 + (a-3)x + b + 4 = 0$ 의 세 근 $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

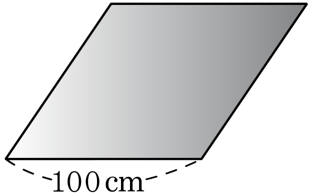
이 때, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 는

직선 $y = 3x - 4$ 위의 점이므로

$y_1 = 3x_1 - 4, y_2 = 3x_2 - 4, y_3 = 3x_3 - 4$

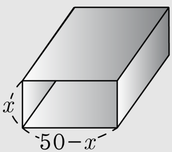
$$\begin{aligned} \therefore y_1 + y_2 + y_3 &= 3(x_1 + x_2 + x_3) - 12 \\ &= 3 \cdot 2 - 12 \\ &= -6 \end{aligned}$$

11. 다음 그림과 같은 철판을 구부려서 직사각형의 철판 S를 만들고자 한다. S 의 단면적의 최댓값은?



① $695\,\text{cm}^2$　② $710\,\text{cm}^2$　③ $625\,\text{cm}^2$　④ $525\,\text{cm}^2$　⑤ $410\,\text{cm}^2$

해설



다음 그림과 같이 단면적이 직사각형이 되도록 철판으르 구부리면 단면적 S 는

$$S = x(50-x) = -x^2 + 50x$$
$$= -(x-25)^2 + 625$$

$\therefore$ $x = 25$ 일 때, S 의 최댓값은 $625\,\text{cm}^2$

12. x 에 대한 다항식 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 에 대하여 $f(x)+2,\ xf(x)+2$ 가 모두 일차식 $x-\alpha$ 로 나누어 떨어질 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 3

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha)+2=0, \alpha f(\alpha)+2=0$

$f(\alpha)=-2, \alpha=1$

$\therefore f(1)=-2$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f(1)=1+a+b+c=-2$

$\therefore a+b+c=-3$

13. $x^2+xy-2y^2+2x+7y+k=f(x,y)$라 할 때, $f(x,y)=0$이 두 개의 직선을 나타내도록 k의 값을 정하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$f(x,\ y)=x^2+(y+2)x-2y^2+7y+k=0$
주어진 식이 두 개의 직선을 나타내려면
$x,\ y$에 관한 일차식으로 인수분해되어야 하므로
근의 공식에서 근호 안의 식 $(=D)$이 완전제곱꼴이어야 한다.

$$D=(y+2)^2-4(-2y^2+7y+k)$$
$$=9y^2-24y+4-4k \quad \cdots(\text{i})$$

(i)이 완전제곱식이어야 하므로
(i)의 판별식

$$\frac{D}{4}=(-12)^2-9(4-4k)=0$$

$108+36k=0 \qquad \therefore\ k=-3$

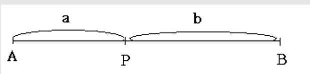
14. 거리가 100 m 인 두 지점 A, B가 있다. 갑은 A에서 출발하며 B로 달리고, 을은 B에서 출발하여 A로 자전거를 타고 달렸다. 두 사람은 동시에 출발하여 P지점에서 만났는데 만나고 나서 갑은 8초 후에 B에, 을은 2초 후에 A에 도착하였다. 갑, 을이 각각 일정한 속도로 달렸다고 할 때, A, P사이의 거리는?

① 20 m ② 30 m ③ $\dfrac{100}{3}$ m

④ $\dfrac{121}{4}$ m ⑤ $\dfrac{147}{5}$ m

해설

갑의 속도를 α, 을의 속도를 β라 하자.



$a+b=100\cdots$ ①

$\dfrac{a}{\alpha}=\dfrac{b}{\beta},\ \ \dfrac{b}{\alpha}=8,\ \ \dfrac{a}{\beta}=2$

정리하면 $\dfrac{a}{\left(\dfrac{b}{8}\right)}=\dfrac{b}{\left(\dfrac{a}{2}\right)}$에서

$\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{b^2}{8},\ 4a^2=b^2$

$\therefore\ b=2a(\because a,\ b$는 양수$)$

①에 대입하면, $3a=100\quad a=\dfrac{100}{3}$ m

15. 이차방정식 $x^2+(k+1)x+2k+1=0$ 의 두 근이 모두 정수일 때, 양수 k의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha \geq \beta)$ 라 하면 근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-(k+1) & \cdots\cdots ① \\ \alpha\beta=2k+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①$\times 2+$②을 하면 $\alpha\beta+2(\alpha+\beta)=-1$

$\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4=3,\quad (\alpha+2)(\beta+2)=3$

$\alpha,\ \beta$ 가 정수이므로 $(\alpha+2,\ \beta+2)=(3,\ 1),\ (-1,\ -3)$

$\therefore\ (\alpha,\ \beta)=(1,\ -1),\ (-3,\ -5)$

①에서

$k=-(\alpha+\beta+1)$ 이므로 $k=-1,\ 7$

$k>0$ 이므로 $k=7$