1. $i(x+2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 5

해설

$$\begin{aligned} i(x+2i)^2 &= i(x^2+4ix-4) = x^2 i - 4x - 4i \\ &= -4x + (x^2-4)i \end{aligned}$$

실수가 되려면 허수부분이 0이면 된다.

$\therefore\ x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

2. $i^2 = -1$이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2,\quad -\sqrt{2},\quad 2i,\quad -2i,$ $3i,\quad -3i,\quad 1-i,\quad 1+i$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$i^2 = -1$이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$의 꼴이 되어야 한다.
$\therefore\ 2i,\ -2i,\ 3i,\ -3i$ 4개,
$2, -\sqrt{2}$는 실수이므로
$(\text{실수})^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$가 된다.

3. $(1-3i)x+(3+2i)y=1+8i$를 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$(1-3i)x+(3+2i)y=1+8i$,
$(x+3y)+(-3x+2y)i=1+8i$ 에서
복소수의 상등에 의하여
$x+3y=1,\ -3x+2y=8$ 이고
연립하여 풀면 $y=1,\ x=-2$
$\therefore\ x+y=-1$

4. $x = 1998,\ y = 4331$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ i　　⑤ $-i$

해설

$\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$

$= \dfrac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$

$= \dfrac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{(y-xi)(x+yi)} = 0$

5. 이차함수 $y=2x^2-6x-4$는 $x=a$일 때 최솟값 b를 갖는다. $a-b$의 값을 구하면?

① -8 ② -4 ③ 6 ④ 10 ⑤ 20

해설

$y=2x^2-6x-4=2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{2}-4=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{2}$

아래로 볼록하고 꼭짓점이 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{17}{2}\right)$

$\therefore x=\frac{3}{2}$일 때, 최솟값 $-\frac{17}{2}$을 갖는다.

$\therefore a-b=\frac{3}{2}-\left(-\frac{17}{2}\right)=10$

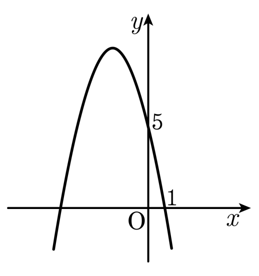
6. 이차함수 $y = -x^2 + 6x + 5$ 의 최댓값을 M , $y = 2x^2 - 12x - 4$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하면?

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

해설

$y = -x^2 + 6x + 5$
$= -(x-3)^2 + 14 \therefore M = 14$
$y = 2x^2 - 12x - 4$
$= 2(x-3)^2 - 22 \therefore m = -22$
$\therefore M - m = 14 + 22 = 36$

7. 이차함수 $y = -x^2 + ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프의 최댓값을 구하면?



① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$y = -x^2 + ax + b$가 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ 5)$ 를 지나므로 $b = 5$,
$0 = -1 + a + b$, $a = -4$
$y = -x^2 - 4x + 5$
$\quad = -(x+2)^2 + 9$
$x = -2$ 일 때, 최댓값은 9 이다.

8. 이차함수 $y = -x^2 + 6x + 5$ 의 최댓값을 M , $y = 2x^2 - 12x - 4$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하면?

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

해설

$y = -x^2 + 6x + 5$
$= -(x-3)^2 + 14 \therefore M = 14$
$y = 2x^2 - 12x - 4$
$= 2(x-3)^2 - 22 \therefore m = -22$
$\therefore M - m = 14 + 22 = 36$

9. 방정식 $a^2x+1=a(x+1)$ 의 해가 존재하지 않을 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a^2x+1=a(x+1)$ 에서 $a(a-1)x=a-1$

ⅰ) $a=1$ 일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다.

ⅱ) $a=0$ 이면 $0\cdot x=-1$ 이므로 해가 없다.

ⅲ) $a\neq 0, a\neq 1$ 일 때, $x=\dfrac{a-1}{a(a-1)}=\dfrac{1}{a}$

따라서 해가 없을 때의 a 의 값은 0 이다.

10. 이차방정식 $(2-\sqrt{3})x^2-2(\sqrt{3}-1)x-6=0$의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2+\sqrt{3}$을 곱하면

$x^2-2(\sqrt{3}+1)x-(12+6\sqrt{3})=0$

근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면

$x=(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+12+6\sqrt{3}}$

$=(\sqrt{3}+1)\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

$=(\sqrt{3}+1)\pm 2(\sqrt{3}+1)$

$\therefore\ x=3\sqrt{3}+3$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

큰 근은 $3\sqrt{3}+3$

그런데 $\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7\cdots$ 이므로

가장 가까운 정수는 8이다.

11. 이차방정식 $x^2-7x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 12

해설

$x^2-7x+1=0$의 두 근이 α, β이므로
$\alpha+\beta=7$, $\alpha\beta=1$
$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta=7+2=9$
따라서 $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=3$

12. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\dfrac{1}{\beta}$, $\beta+\dfrac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2-6x+4=0$　　② $x^2-3x+4=0$
③ $x^2+6x+5=0$　　④ $x^2+4x+5=0$
⑤ $x^2-4x+5=0$

해설

$x^2-3x+1=0$의 두 근이 α,β이므로 $\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$

두 근의 합 : $\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\dfrac{1}{\alpha}\right)$

$=\alpha+\beta+\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=3+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3+3=6$

두 근의 곱 : $\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\dfrac{1}{\alpha}\right)$

$=\alpha\beta+1+1+\dfrac{1}{\alpha\beta}=\alpha\beta+\dfrac{1}{\alpha\beta}+2=4$

$\therefore$ 방정식은 $x^2-6x+4=0$

13. x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(m-2)x + 2m - 1 = 0$의 두 근이 모두 음수일 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $m > 5$ ② $m \geq 5$ ③ $m < 5$
④ $m \leq 5$ ⑤ $-5 \leq x \leq 5$

해설

주어진 이차방정식이 두 실근을 가져야 하므로
$D/4 = (m-2)^2 - 2m + 1 \geq 0$
즉 $m^2 - 4m + 4 - 2m + 1 = m^2 - 6m + 5 \geq 0$
따라서 $(m-5)(m-1) \geq 0$이므로
$m \leq 1$ 또는 $m \geq 5$
또 두근의 합 $-2(m-2) < 0$이어야 하므로 $m > 2$
또 두근의 곱 $2m - 1 > 0$이어야 하므로 $m > \frac{1}{2}$
따라서 $m \geq 5$

14. 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 $y=-2x$에 모두 접할 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ -1 ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

해설

$x^2+ax+b=-2x$에서
$x^2+(a+2)x+b=0$
$\therefore\ D=(a+2)^2-4b=0\cdots$ ①
$x^2+ax+b=\frac{1}{2}x$에서
$x^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)x+b=0$
$D=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-4b=0\ \cdots$ ②
①,②에서 $(a+2)^2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$
$\therefore\ a=-\frac{3}{4}$

15. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -2$ 일 때, 최댓값 3 을 갖는다. 이 때 $a + b + c$ 의 값은?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

모양이 같으므로 $a = -\frac{1}{2}$

꼭짓점에서 최댓값을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ 3)$,

따라서 $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

$\therefore\ a = -\frac{1}{2},\ b = -2,\ c = 1$

$\therefore a + b + c = -\frac{3}{2}$

16. 합이 16 인 두 수가 있다. 이 두수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 50 ② 62 ③ 64 ④ 79 ⑤ 83

해설

두 수를 각각x, $16-x$ 라고 하면

$y = x(16-x)$

$= -x^2 + 16x$

$= -(x^2 - 16x + 64 - 64)$

$= -(x-8)^2 + 64$

$x = 8$ 일 때, 최댓값 64 을 갖는다.

17. x에 대한 삼차방정식 $x^3 + (1-2a)x^2 + a(a-2)x + a^2 = 0$의 근이 오직 하나 뿐일 때, 실수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x) = x^3 + (1-2a)x^2 + a(a-2)x + a^2$으로 놓으면

$f(a) = a^3 + (1-2a) \cdot a^2 + a(a-2) \cdot a + a^2 = 0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$(x-a)^2(x+1) = 0$

주어진 방정식의 근이 오직 하나뿐이므로 $x = -1$을 삼중근으로 갖는다.

$\therefore\ a = -1$

18. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면$(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.

$\therefore\ b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4,\ b = 6$이다.

$\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

19. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-y^2+6y-9=0 \\ (x-1)^2+y^2=2 \end{cases}$ 를 만족하는 실수 해의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 1개

해설

$\begin{cases} x^2-y^2+6y-9=0 & \cdots ㉠ \\ (x-y)^2+y^2=2 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2-(y-3)^2=0$

$(x+y-3)(x-y+3)=0$

$y=x+3$ 또는 $y=-x+3$

ⅰ) $y=-x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2-4x+4=0$

$\therefore\ x=2$ 이 때, $y=1$

ⅱ) $y=x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2+2x+4=0$

$\therefore\ x=-1\pm\sqrt{3}i$

이 때, $y=2\pm\sqrt{3}i$

ⅰ), ⅱ)에서 실수해의 순서쌍은 $(2,\ 1)$이다.

따라서 실수해의 순서쌍의 개수는 1개이다.

20. 다음 두 방정식이 공통근 α를 갖는다. 이 때, $m+\alpha$의 값을 구하여라.

$$x^2+(m+2)x-4=0\ ,\ x^2+(m+4)x-6=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 방정식의 공통근이 α 이므로

$\alpha^2+(m+2)\alpha-4=0\cdots㉠$

$\alpha^2+(m+4)\alpha-6=0\cdots㉡$

㉠ − ㉡ 에서 $-2\alpha+2=0\ \therefore\ \alpha=1$

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $1+m+2-4=0$

$\therefore\ m=1$

$\therefore\ m+\alpha=2$

21. 0이 아닌 실수 x, y가 $(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$을 만족할 때, x에 관한 이 방정식은 실수 a에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. $(a \neq 0)$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 1

▷ 정답: −1

해설

$(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$에서
$x^2y^2+4a^2x^2+y^2+4a^2-8axy=0$
$(x^2y^2-4axy+4a^2)+(y^2-4axy+4a^2x^2)=0$
$(xy-2a)^2+(y-2ax)^2=0$
$xy-2a$, $y-2ax$는 실수이므로
$xy-2a=0$, $y-2ax=0$
$\therefore$ $xy=2a$, $y=2ax$
두 식을 연립하면, $2ax^2=2a$
$(a \neq 0)$이므로 $x^2=1$, $x=\pm 1$

22. $x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값을 구하면 ?

① $\frac{2}{9}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{4}{9}$　④ $\frac{5}{9}$　⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$
$= x^2 + (y+1)x + ay^2 + y - 2$가
x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면
$D = (y+1)^2 - 4(ay^2 + y - 2)$
$\quad = y^2 + 2y + 1 - 4ay^2 - 4y + 8$
$\quad = (1-4a)y^2 - 2y + 9$에서
$\frac{D}{4} = 1 - 9(1-4a) = 0$
$\therefore\ 1 - 9 + 36a = 0$
$\therefore\ a = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

23. 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근 α, β, γ에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma=3$ 일 때, 방정식 $f(2x+3)=0$의 세 근의 합은?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

세 근의 합은 $\left(-\frac{x^2\text{의 계수}}{x^3\text{의 계수}}\right)$이므로
x^3 의 계수와 x^2 의 계수만 구하면 된다.
최고차항의 계수가 1인 삼차방정식을
$f(x)$라 하면 세 근의 합이 3이므로
$f(x)=x^3-3x^2+bx+d$
$f(2x+3)$
$=(2x+3)^3-3\cdot(2x+3)^2+b\cdot(2x+3)+d$
3차항과 2차항의 계수를 중심으로
식을 정리하면
$8x^3+24x^2+\ldots\cdots=0$
$\therefore$ 세 근의 합$=-3$

해설

$f(2x+3)=0$의 세 근을
각각 $p,\ q,\ r$이라 하면,
$2p+3=\alpha\ \cdots$ ㉠
$2q+3=\beta\ \cdots$ ㉡
$2r+3=\gamma\ \cdots$ ㉢
㉠ + ㉡ + ㉢에서
$2(p+q+r)+9=3$
$\therefore\ p+q+r=-3$

24. 세 방정식 $x^2+2ax+bc=0$, $x^2+2bx+ca=0$, $x^2+2cx+ab=0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c는 실수)

① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.

② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.

③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.

④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.

⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$\frac{D_1}{4}=a^2-bc$,

$\frac{D_2}{4}=b^2-ca$,

$\frac{D_3}{4}=c^2-ab$라 하면

$\frac{D_1}{4}+\frac{D_2}{4}+\frac{D_3}{4}$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geq 0$

따라서, $\frac{D_1}{4}$, $\frac{D_2}{4}$, $\frac{D_3}{4}$중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

25. $\dfrac{x^2-y^2-1}{x-y}=6$을 만족시키는 자연수 x, y값의 순서쌍의 개수는?

▶ 답: 개

▷ 정답: 2개

해설

$\dfrac{x^2-y^2-1}{x-y}=6$ 에서

$\dfrac{(x-y)(x+y)-1}{x-y}=(x+y)+\dfrac{-1}{x-y}=6$

$x-y$ 는 -1 의 약수이다. 즉 -1 또는 1

i) $x-y=1$ 일 때, $x+y=7$

$\therefore\ x=4,\ y=3$

ii) $x-y=-1$ 일 때, $x+y=5$

$\therefore\ x=2,\ y=3$

따라서 구하는 $(x,\ y)=(4,\ 3),\ (2,\ 3)$ 이므로

2 개이다.