1. $i(x+2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① ±1 ② ±2 ③ ±3 ④ ±4 ⑤ ±5

해설

$$i(x+2i)^2 = i(x^2+4ix-4) = x^2 i - 4x - 4i$$
$$= -4x + (x^2-4)i$$

실수가 되려면 허수부분이 0이면 된다.

$\therefore\ x^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm2$

2. $i^2 = -1$ 이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2,\quad -\sqrt{2},\quad 2i,\quad -2i,$ $3i,\quad -3i,\quad 1-i,\quad 1+i$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$i^2 = -1$ 이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$ 의 꼴이 되어야 한다.

$\therefore\ 2i,\quad -2i,\ 3i,\quad -3i$ 4 개,

$2, -\sqrt{2}$ 는 실수이므로

$(\text{실수})^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$ 가 된다.

3. $(1-3i)x+(3+2i)y=1+8i$를 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1-3i)x+(3+2i)y=1+8i$,

$(x+3y)+(-3x+2y)i=1+8i$ 에서

복소수의 상등에 의하여

$x+3y=1,\ \ -3x+2y=8$ 이고

연립하여 풀면 $y=1,\ x=-2$

$\therefore\ \ x+y=-1$

4. $x = 1998$, $y = 4331$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$$\frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi}$$

$$= \frac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$$

$$= \frac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{(y-xi)(x+yi)} = 0$$

5. 이차함수 $y = 2x^2 - 6x - 4$는 $x = a$ 일 때 최솟값 b를 갖는다. $a - b$ 의 값을 구하면?

① -8 ② -4 ③ 6 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$y = 2x^2 - 6x - 4 = 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{2} - 4 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{2}$$

아래로 볼록하고 꼭짓점이 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{17}{2}\right)$

$\therefore x = \frac{3}{2}$ 일 때, 최솟값 $-\frac{17}{2}$을 갖는다.

$\therefore a - b = \frac{3}{2} - \left(-\frac{17}{2}\right) = 10$

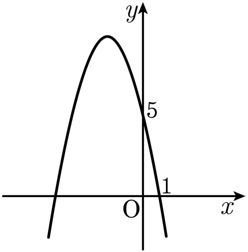
6. 이차함수 $y = -x^2 + 6x + 5$ 의 최댓값을 M , $y = 2x^2 - 12x - 4$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하면?

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

해설

$$y = -x^2 + 6x + 5$$
$$= -(x-3)^2 + 14 \therefore M = 14$$
$$y = 2x^2 - 12x - 4$$
$$= 2(x-3)^2 - 22 \therefore m = -22$$
$$\therefore M - m = 14 + 22 = 36$$

7. 이차함수 $y = -x^2 + ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프의 최댓값을 구하면?



① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$y = -x^2 + ax + b$가 점 $(1,\ 0),\ (0,\ 5)$ 를 지나므로 $b = 5$,

$0 = -1 + a + b$, $a = -4$

$y = -x^2 - 4x + 5$

$\quad = -(x+2)^2 + 9$

$x = -2$ 일 때, 최댓값은 9 이다.

8. 이차함수 $y = -x^2 + 6x + 5$ 의 최댓값을 M , $y = 2x^2 - 12x - 4$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하면?

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

해설

$$y = -x^2 + 6x + 5$$
$$= -(x-3)^2 + 14 \quad \therefore M = 14$$
$$y = 2x^2 - 12x - 4$$
$$= 2(x-3)^2 - 22 \quad \therefore m = -22$$
$$\therefore M - m = 14 + 22 = 36$$

9. 방정식 $a^2x+1=a(x+1)$의 해가 존재하지 않을 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a^2x+1=a(x+1)$ 에서 $a(a-1)x=a-1$

i) $a=1$ 일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다.

ii) $a=0$ 이면 $0\cdot x=-1$ 이므로 해가 없다.

iii) $a\neq 0, a\neq 1$ 일 때, $x=\dfrac{a-1}{a(a-1)}=\dfrac{1}{a}$

따라서 해가 없을 때의 a의 값은 0이다.

10. 이차방정식 $(2-\sqrt{3})x^2-2(\sqrt{3}-1)x-6=0$의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2+\sqrt{3}$을 곱하면

$x^2-2(\sqrt{3}+1)x-(12+6\sqrt{3})=0$

근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면

$$x=(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+12+6\sqrt{3}}$$
$$=(\sqrt{3}+1)\pm2\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$
$$=(\sqrt{3}+1)\pm2(\sqrt{3}+1)$$

$\therefore\ x=3\sqrt{3}+3$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

큰 근은 $3\sqrt{3}+3$

그런데 $\sqrt{3}\fallingdotseq1.7\cdots$ 이므로

가장 가까운 정수는 8이다.

11. 이차방정식 $x^2 - 7x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$의 값은?

① 3　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 12

해설

$x^2 - 7x + 1 = 0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha + \beta = 7,\ \alpha\beta = 1$

$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta = 7 + 2 = 9$

따라서 $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 3$

12. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2-6x+4=0$　② $x^2-3x+4=0$

③ $x^2+6x+5=0$　④ $x^2+4x+5=0$

⑤ $x^2-4x+5=0$

해설

$x^2-3x+1=0$의 두 근이 α,β이므로 $\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$

두 근의 합 : $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=3+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3+3=6$

두 근의 곱 : $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2=4$

$\therefore$ 방정식은 $x^2-6x+4=0$

13. x에 대한 이차방정식 $x^2+2(m-2)x+2m-1=0$의 두 근이 모두 음수일 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $m>5$ ② $m \geq 5$ ③ $m<5$

④ $m \leq 5$ ⑤ $-5 \leq x \leq 5$

해설

주어진 이차방정식이 두 실근을 가져야 하므로

$D/4=(m-2)^2-2m+1 \geq 0$

즉 $m^2-4m+4-2m+1=m^2-6m+5 \geq 0$

따라서 $(m-5)(m-1) \geq 0$이므로

$m \leq 1$ 또는 $m \geq 5$

또 두근의 합 $-2(m-2)<0$이어야 하므로 $m>2$

또 두근의 곱 $2m-1>0$이어야 하므로 $m>\frac{1}{2}$

따라서 $m \geq 5$

14. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$의 그래프가 두 직선 $y = \frac{1}{2}x$와 $y = -2x$에 모두 접할 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ -1 ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

해설

$x^2 + ax + b = -2x$에서

$x^2 + (a+2)x + b = 0$

$\therefore\ D = (a+2)^2 - 4b = 0 \cdots$ ①

$x^2 + ax + b = \frac{1}{2}x$에서

$x^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x + b = 0$

$D = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - 4b = 0\ \cdots$ ②

①,②에서 $(a+2)^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$

$\therefore\ a = -\frac{3}{4}$

15. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -2$ 일 때, 최댓값 3 을 갖는다. 이 때 $a + b + c$ 의 값은?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

모양이 같으므로 $a = -\frac{1}{2}$

꼭짓점에서 최댓값을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ 3)$,

따라서 $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 3 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

$\therefore\ a = -\frac{1}{2},\ b = -2,\ c = 1$

$\therefore a + b + c = -\frac{3}{2}$

16. 합이 16 인 두 수가 있다. 이 두수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 50 ② 62 ③ 64 ④ 79 ⑤ 83

해설

두 수를 각각x, $16-x$ 라고 하면

$$\begin{aligned} y &= x(16-x) \\ &= -x^2+16x \\ &= -(x^2-16x+64-64) \\ &= -(x-8)^2+64 \end{aligned}$$

$x=8$ 일 때, 최댓값 64 을 갖는다.

17. x에 대한 삼차방정식 $x^3+(1-2a)x^2+a(a-2)x+a^2=0$의 근이 오직 하나 뿐일 때, 실수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)=x^3+(1-2a)x^2+a(a-2)x+a^2$으로 놓으면

$f(a)=a^3+(1-2a)\cdot a^2+a(a-2)\cdot a+a^2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$(x-a)^2(x+1)=0$

주어진 방정식의 근이 오직 하나뿐이므로 $x=-1$을 삼중근으로 갖는다.

$\therefore\ a=-1$

18. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면 $(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.

$\therefore\ b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4,\ b = 6$ 이다.

$\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

19. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 를 만족하는 실수 해의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ________ 개

▷ **정답 :** 1 개

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 & \cdots ㉠ \\ (x-y)^2 + y^2 = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x^2 - (y-3)^2 = 0$

$(x+y-3)(x-y+3) = 0$

$y = x+3$ 또는 $y = -x+3$

i) $y = -x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$\therefore\ x = 2$이 때, $y = 1$

ii) $y = x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 + 2x + 4 = 0$

$\therefore\ x = -1 \pm \sqrt{3}i$

이 때, $y = 2 \pm \sqrt{3}i$

i), ii) 에서 실수해의 순서쌍은 $(2,\ 1)$이다.

따라서 실수해의 순서쌍의 개수는 1 개이다.

20. 다음 두 방정식이 공통근 α를 갖는다. 이 때, $m+\alpha$의 값을 구하여라.

$$x^2+(m+2)x-4=0\ ,\ x^2+(m+4)x-6=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 방정식의 공통근이 α이므로

$\alpha^2+(m+2)\alpha-4=0\cdots$㉠

$\alpha^2+(m+4)\alpha-6=0\cdots$㉡

㉠ − ㉡ 에서 $-2\alpha+2=0\quad\therefore\quad\alpha=1$

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $1+m+2-4=0$

$\therefore\quad m=1$

$\therefore\quad m+\alpha=2$

21. 0이 아닌 실수 $x,\ y$가 $(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$을 만족할 때, x에 관한 이 방정식은 실수 a에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. $(a \neq 0)$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : -1

해설

$(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$에서

$x^2y^2+4a^2x^2+y^2+4a^2-8axy=0$

$(x^2y^2-4axy+4a^2)+(y^2-4axy+4a^2x^2)=0$

$(xy-2a)^2+(y-2ax)^2=0$

$xy-2a,\ y-2ax$는 실수이므로

$xy-2a=0,\ y-2ax=0$

$\therefore\ xy=2a,\ y=2ax$

두 식을 연립하면, $2ax^2=2a$

$(a \neq 0)$이므로 $x^2=1,\ x=\pm1$

22. $x^2+xy+ay^2+x+y-2$가 $x,\ y$의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값을 구하면 ?

① $\frac{2}{9}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{4}{9}$　④ $\frac{5}{9}$　⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$x^2+xy+ay^2+x+y-2$

$=x^2+(y+1)x+ay^2+y-2$가

$x,\ y$의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면

$D=(y+1)^2-4(ay^2+y-2)$

$\quad=y^2+2y+1-4ay^2-4y+8$

$\quad=(1-4a)y^2-2y+9$에서

$\frac{D}{4}=1-9(1-4a)=0$

$\therefore\ 1-9+36a=0$

$\therefore\ a=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

23. 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근 α, β, γ에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma=3$ 일 때, 방정식 $f(2x+3)=0$의 세 근의 합은?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

세 근의 합은 $\left(-\dfrac{x^2\text{의 계수}}{x^3\text{의 계수}}\right)$ 이므로

x^3 의 계수와 x^2 의 계수만 구하면 된다.

최고차항의 계수가 1 인 삼차방정식을

$f(x)$ 라 하면 세 근의 합이 3 이므로

$f(x)=x^3-3x^2+bx+d$

$f(2x+3)$

$=(2x+3)^3-3\cdot(2x+3)^2+b\cdot(2x+3)+d$

3 차항과 2 차항의 계수를 중심으로

식을 정리하면

$8x^3+24x^2+\ldots\cdots=0$

$\therefore$ 세 근의 합$=-3$

해설

$f(2x+3)=0$의 세 근을

각각 $p,\ q,\ r$이라 하면,

$2p+3=\alpha\ \cdots$ ㉠

$2q+3=\beta\ \cdots$ ㉡

$2r+3=\gamma\ \cdots$ ㉢

㉠ + ㉡ + ㉢에서

$2(p+q+r)+9=3$

$\therefore\ p+q+r=-3$

24. 세 방정식 $x^2+2ax+bc=0$, $x^2+2bx+ca=0$, $x^2+2cx+ab=0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c는 실수)

① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.

② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.

③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.

④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.

⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$\dfrac{D_1}{4}=a^2-bc$,

$\dfrac{D_2}{4}=b^2-ca$,

$\dfrac{D_3}{4}=c^2-ab$라 하면

$\dfrac{D_1}{4}+\dfrac{D_2}{4}+\dfrac{D_3}{4}$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\dfrac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geq 0$

따라서, $\dfrac{D_1}{4}$, $\dfrac{D_2}{4}$, $\dfrac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

25. $\dfrac{x^2 - y^2 - 1}{x - y} = 6$을 만족시키는 자연수 x, y값의 순서쌍의 개수는?

▶ **답 :** ____개

▷ **정답 :** 2개

해설

$\dfrac{x^2 - y^2 - 1}{x - y} = 6$ 에서

$\dfrac{(x-y)(x+y)-1}{x-y} = (x+y) + \dfrac{-1}{x-y} = 6$

$x - y$ 는 -1 의 약수이다. 즉 -1 또는 1

i) $x - y = 1$ 일 때, $x + y = 7$

$\therefore\ x = 4,\ y = 3$

ii) $x - y = -1$ 일 때, $x + y = 5$

$\therefore\ x = 2,\ y = 3$

따라서 구하는 $(x,\ y) = (4,\ 3),\ (2,\ 3)$ 이므로

2 개이다.