1. $z = \dfrac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^2 - 2z + 3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ -1

해설

$z = \dfrac{2}{1+i} = 1 - i$

$z^2 - 2z + 3 = (1-i)^2 - 2(1-i) + 3 = 1$

2. α, β 가 복소수일 때, <보기> 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고른 것은? (단, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$ 이다.
㉡ $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$ 이다.
㉢ $\alpha=\overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 반례 : $\alpha=1,\ \beta=i$
㉡ (생략)
㉢ $\alpha=x+yi$ 라 하면
$\alpha\beta=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2(x,y$는실수$)$
$x^2+y^2=0$ 이려면 $x=0, y=0$
즉, $\alpha=0$

3. $z=1-i$ 일 때, $\frac{\bar{z}-1}{z}-\frac{z-1}{\bar{z}}$ 의 값은?

① $-i$ ② i ③ $-2i$ ④ $2i$ ⑤ 1

해설

$z=1-i, \bar{z}=1+i$

$\therefore$ (준식) $=\frac{i}{1-i}-\frac{-i}{1+i}=\frac{2i}{2}=i$

4. 제곱해서 $5-12i$ 가 되는 복소수는?

① $\pm(2+3i)$　② $\pm(2-3i)$　③ $\pm(3-2i)$

④ $\pm(3+3i)$　⑤ $\pm(3+3i)$

해설

구하려는 복소수를 $a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면

$(a+bi)^2 = a^2-b^2+2abi$ 에서

$a^2-b^2+2abi = 5-12i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=5$, $2ab=-12$ 에서

$ab=-6$, $b=-\frac{6}{a}$ 이므로

$a^2-\left(-\frac{6}{a}\right)^2=5$, $a^2-\frac{36}{a^2}=5$

양변에 a^2 을 곱하면

$a^4-5a^2-36=0$, $(a^2-9)(a^2+4)=0$

따라서 $a^2=9$ 또는 $a^2=-4$ 이므로

$a=\pm3$ 또는 $a=\pm2i$

그런데 a 는 실수이므로 $a=\pm3$ 이고, $b=\mp2$ 이다.

따라서 구하는 복소수는 $\pm(3-2i)$ 이다.

5. 이차함수 $y = -2x^2 + 8x$ 의 최댓값을 구하면?

① 8 ② 4 ③ 2 ④ -2 ⑤ -4

해설

$y = -2x^2 + 8x = -2(x-2)^2 + 8$
$x = 2$ 일 때, 최댓값은 8 이다.

6. 다음 이차함수 중 최댓값을 갖는 것은?

① $y = x^2 + x - 1$　② $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$

③ $y = \frac{1}{5}x^2 + 4$　④ $y = -x^2 - 2x + 1$

⑤ $y = \frac{3}{4}(x+1)^2$

해설

이차항의 계수가 음수인 것을 찾는다.

7. 이차함수 $y = -5x^2 + 20x + 3$은 $x = a$일 때, 최솟값 b를 갖는다. $a + b$의 값은?

① 20 ② 22 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

해설

$y = -5x^2 + 20x + 3$
$= -5(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3$
$= -5(x - 2)^2 + 23$
$\therefore a = 2,\ b = 23$
$\therefore a + b = 2 + 23 = 25$

8. $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면
$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right) + 1 = (x-1)^2 + 1$
따라서 함수 $f(x)$ 는 점$(1, 1)$ 을 꼭지점으로 하는
아래로 볼록한 포물선이다.
그러므로 $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서
최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,
최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

9. 방정식 $|x|+|x-1|=9$ 의 모든 근의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -20

해설

$|x|+|x-1|=9$ 에서

ⅰ) $x<0$ 일 때,

$-x-x+1=9$

$\therefore\ x=-4$

ⅱ) $0\le x<1$ 일 때,

$x-x+1=9$(성립하지 않음)

ⅲ) $x\ge1$ 일 때,

$x+x-1=9$

$\therefore\ x=5$

따라서 모든 근의 곱은

$(-4)\times5=-20$

10. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 + 3|x| - 4 = 0$$

① 0 ② ± 1 ③ $\pm\sqrt{2}$ ④ $\pm\sqrt{3}$ ⑤ ± 2

해설

(ⅰ) $x \geq 0$일 때 $|x| = x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 + 3x - 4 = 0, (x+4)(x-1) = 0$
$\therefore x = -4$ 또는 $x = 1$
이 때, $x \geq 0$이므로 $x = -4$는 부적합
$\therefore x = 1$
(ⅱ) $x < 0$일 때 $|x| = -x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 - 3x - 4 = 0, (x-4)(x+1) = 0$
$x = 4$ 또는 $x = -1$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -1$
$\therefore x = 1$ 또는 $x = -1$
이 때, $x < 0$이므로 $x = 4$는 부적합
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = \pm 1$

11. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$의 두 근이 3, b일 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 28

해설

$x = 3$이 $x^2 - ax + 12 = 0$의 근이므로
$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore\ a = 7$
이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$에서 $(x - 3)(x - 4) = 0$
그러므로 $x = 3$ 또는 $x = 4$
$\therefore\ b = 4 \quad \therefore\ ab = 28$

12. $a > 0,\ b > 0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$이고, $a < 0,\ b < 0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이다. 이러한 성질을 이용하여 이차방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -5

해설

$\alpha + \beta = -3,\ \alpha\beta = 1$

$\therefore \alpha < 0,\ \beta < 0$

$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = -\sqrt{\alpha\beta}$

$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = (\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$

$= (\alpha + \beta) - 2 \cdot \sqrt{\alpha\beta} = -3 - 2 \cdot 1 = -5$

13. 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이 $a-1,\ b-1$일 때, ab의 값은?

① 0　　② 2　　③ 4　　④ 6　　⑤ 8

해설

$x^2 - ax + b = 0$의 두 근이 $a-1,\ b-1$이므로
두 근의 합은 $a + b - 2 = a$
$b - 2 = 0$ 이므로 $b = 2$
두 근의 곱은

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1) &= ab - a - b + 1 \\ &= 2a - a - 2 + 1 = a - 1 = 2\end{aligned}$$

따라서 $a = 3$ 따라서 $ab = 2 \cdot 3 = 6$

14. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2일 때, 방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α,β라 하면 $\alpha+\beta=2$
$f(2x-3)=0$에서
$2x-3=\alpha,\ 2x-3=\beta$
$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+3}{2},\ \dfrac{\beta+3}{2}$
$\therefore$ (두 근의 합) $=\dfrac{(\alpha+\beta)+6}{2}=4$

15. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

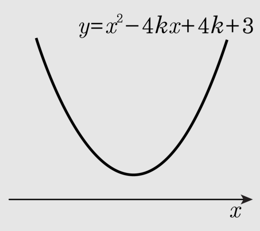
A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28$, $c = -28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6$, $b = 6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2 + 6ax - 28a = 0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

16. 두 함수 $y=x^2-2kx+4k$, $y=2kx-3$ 의 그래프에 대하여 이차함수의 그래프가 직선보다 항상 위쪽에 있도록 k 의 값의 범위를 정하면?

① $-\frac{7}{9}<k<-\frac{11}{6}$　② $-\frac{1}{4}<k<-\frac{6}{5}$　③ $-\frac{1}{3}<k<0$
④ $-\frac{1}{2}<k<\frac{3}{2}$　⑤ $-\frac{1}{2}<k<\frac{7}{5}$

해설

함수 $y=x^2-2kx+4k$ 의 그래프가 직선 $y=2kx-3$ 보다 항상 위쪽에 있으려면
$y=x^2-2kx+4k>2kx-3$,
즉 $x^2-4kx+4k+3>0$ 이 항상 성립해야 한다.
이 때, 이 부등식이 항상 성립하려면 그림과 같이 $y=x^2-4kx+4k+3$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있어야 하므로



$\frac{D}{4}=4k^2-4k-3<0$, $(2k+1)(2k-3)<0$
$\therefore -\frac{1}{2}<k<\frac{3}{2}$

17. 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2-4x+k$ 의 최솟값과 이차함수 $y=-2x^2+4x-2k+2$ 의 최댓값이 일치할 때, k 의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$i)$ $y=\frac{1}{2}(x^2-8x+16-16)+k=\frac{1}{2}(x-4)^2+k-8$

$x=4$ 일 때, 최솟값 $k-8$ 을 갖는다.

$ii)$ $$\begin{aligned} y &= -2(x^2-2x+1-1)-2k+2 \\ &= -2(x-1)^2-2k+4 \end{aligned}$$

$x=1$ 일 때 최댓값 $-2k+4$ 를 갖는다.

$i)$ 의 최솟값과 $ii)$ 의 최댓값이 같으므로

$k-8=-2k+4$

$\therefore k=4$

18. 두 함수 $f(x) = x^2 - 6x - 5,\ g(x) = 3x + 2$ 에 대하여 $F(x) = f(g(x))$ 라 정의하자.
$-2 \le x \le 3$ 에서 $F(x)$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 48　② 56　③ 64　④ 72　⑤ 80

해설

$t = g(x) = 3x + 2$ 라 놓으면
$-2 \le x \le 3$ 에서 $-4 \le t \le 11 \cdots$ ㉠
$F(x) = f(t) = t^2 - 6t - 5 = (t-3)^2 - 14$
㉠의 범위에서
$t = 3$ 일 때 $m = -14$
$t = 11$ 일 때 $M = 50$
$\therefore\ M - m = 50 - (-14) = 64$

19. 삼차방정식 $x^3-8x^2+17x-10=0$ 의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 라 할 때, $\alpha-\beta-\gamma$ 의 값은?(단, $\alpha<\beta<\gamma$)

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

$x^3-8x^2+17x-10=0$ 인수분해하여 해를 구하면
$(x-1)(x-2)(x-5)=0$
$\therefore\ \alpha=1, \beta=2, \gamma=5$
$\therefore\ \alpha-\beta-\gamma=1-2-5=-6$

20. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 아닌 것을 구하면?

$$(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)-16=0$$

① 4 ② -4 ③ -2 ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$x^2-2x=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-6X-16=0,\ (X-8)(X+2)=0$

$\therefore x=8$ 또는 $X=-2$

(i) $X=8$ 일 때 $x^2-2x=8$ 에서 $(x-4)(x+2)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-2$

(ii) $X=-2$ 일 때$x^2-2x=-2$ 에서 $x^2-2x+2=0$

$\therefore x=1\pm i$

따라서 (i), (ii) 에서 $x=4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1\pm i$

21. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 3 = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}i$ 일 때, 두 실수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -15　② -10　③ 0　④ 5　⑤ 10

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}i$ 이므로 켤레근은 $1 - \sqrt{2}i$

세 근이 α, β, γ 일때 $\alpha\beta\gamma = 3$ 이므로, $\alpha = 1 + \sqrt{2}i$, $\beta = 1 - \sqrt{2}i$

라 하면, $(1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) \cdot \gamma = 3$

$3 \cdot \gamma = 3$

$\gamma = 1$

$\alpha + \beta + \gamma = -a = (1 + \sqrt{2}i) + (1 - \sqrt{2}i) + 1 = 3$

$a = -3$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\beta = b = 3 + (1 - \sqrt{2}i) \cdot 1 + 1 \cdot (1 + \sqrt{2}i) = 5$

$b = 5$

$\therefore\ ab = (-3) \cdot 5 = -15$

22. $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^{50} + \omega^{51} + \omega^{52}$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^3 - 1 = 0$의 한 허근이 ω일때
$(x-1)(x^2+x+1) = 0$에서
$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$이 성립한다.
주어진 문제식을 ω^{50}으로 묶으면
$\omega^{50}(\omega^2 + \omega + 1)$이고
$\omega^2 + \omega + 1 = 0$이므로 답은 0이다.

23. 다음 방정식을 만족하는 실수 x, y의 합을 구하여라.

$$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$에서 $x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면
$(x^2y^2-4xy+4)+(4x^24xy+y^2)=0$
이 때, x, y가 실수이므로 $xy-2$, $2x-y$도 실수이다.
$\therefore xy-2=0 \quad \cdots$ ㉠,
$2x-y=0 \quad \cdots$ ㉡
㉡에서 $y=2x$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2=1$
따라서, $x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$
그러므로 x, y의 값은 $x=\pm1$, $y=\pm2$(복부호 동순)
따라서 x, y의 합은 $-3, 3$

24. $x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근이 정수가 되도록 정수 m의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라면

$\alpha+\beta=1-m \cdots$ ㉠, $\alpha\beta=m+1 \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $\alpha\beta+\alpha+\beta=2$ ($\alpha,\ \beta$는 정수)

$(\alpha+1)(\beta+1)=3$

$\therefore \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=2\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=-4\end{cases}$ 를 ㉡에 대입하면

$m=-1,\ 7$

25. x에 관한 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 해를 $\alpha,\ \beta$라고 할 때, 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 $f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta,\ f(\alpha+\beta)=\alpha+\beta,\ f(0)=-1$을 만족한다. 이 때 $ab+cd$의 값은?

① -5　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 5

해설

$x^2-x+1=0$의 두 근 : $\alpha,\ \beta,$

$\alpha+\beta=1\ ,\ \alpha\beta=1$

$f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta,$

$f(\alpha+\beta)=\alpha+\beta$이므로

$f(x)-x=a(x-\alpha)(x-\beta)\left\{x-(\alpha+\beta)\right\}$

$f(0)=-1\Rightarrow -1=-a\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\therefore a=1(\because \alpha\beta=1, \alpha+\beta=1)$

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-1)+x$

$(\because\ \alpha+\beta=1)$

$f(x)=x^3-(\alpha+\beta+1)x^2+(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)x-\alpha\beta$

$f(x)=x^3-2x^2+3x-1$

$\Leftrightarrow f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$a=1, b=-2, c=3, d=-1$

$\therefore\ ab+cd=-2-3=-5$