1. 실수 x, y에 대하여, 등식 $2x+y+(x-3y)i=3+2i$가 성립할 때, $\frac{x}{y}$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{11}$ ② 11 ③ 7 ④ -7 ⑤ -11

해설

$2x+y=3,\ x-3y=2$ 이므로

$x=\frac{11}{7}$, $y=-\frac{1}{7}$

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{11}{7}\times-\frac{7}{1}=-11$

2. $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$ 일 때, $z_1^3 + z_2^3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $4 - 2i$ ② 0 ③ 20

④ $-2 + 4i$ ⑤ -4

해설

$z_1 + z_2 = 2,\ z_1 z_2 = 2$

$$z_1^3 + z_2^3 = (z_1 + z_2)^3 - 3z_1 z_2 (z_1 + z_2)$$
$$= 8 - 12$$
$$= -4$$

3. $(2-i)\bar{z}+4iz=-1+4i$를 만족하는 복소수 z에 대하여 $z\bar{z}$의 값은?
(단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$z=a+bi$라 놓으면 $\bar{z}=a-bi$

$(2-i)(a-bi)+4i(a+bi)=-1+4i$

$(2a-5b)+(3a-2b)i=-1+4i$

$\therefore\ 2a-5b=-1\cdots$㉠

$3a-2b=4\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=1$

$\therefore\ z=2+i,\quad \bar{z}=2-i$

$\therefore\ z\bar{z}\ =\ (2+i)(2-i)=2^2-i^2=5$

4. $x=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, x^2-x+1 의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1

④ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$　　⑤ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2 를 곱하면 $2x=1-\sqrt{3}i$

그러므로 $2x-1=-\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하면 $4x^2-4x+1=-3$

즉, $4x^2-4x+4=0$

따라서, $x^2-x+1=0$

5. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x = -1$ 에서 최댓값 7 을 갖고, $f(2) = -2$ 를 만족할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 3 ② 7 ③ 11 ④ −3 ⑤ −5

해설

$f(x) = a(x+1)^2 + 7, f(2) = -2$
$\Rightarrow 3^2 \times a + 7 = -2, a = -1$
$\therefore\ f(x) = -(x+1)^2 + 7 = -x^2 - 2x + 6$
따라서 $a + b + c = 3$

6. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 은 $x = 2$ 일 때 최댓값 5 를 가진다. 이때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$y = ax^2 + bx - 3 = a(x-2)^2 + 5$

$= ax^2 - 4ax + 4a + 5$ 이므로

$b = -4a,\ -3 = 4a + 5$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -2,\ b = 8$

$\therefore a + b = 6$

7. 다음 함수 중 최댓값을 갖는 것은?

① $y = 2(x-3)^2$
② $y = x(x-1)$
③ $y = 3x^2 - x + 2$
④ $y = -x^2 + 4x - 3$
⑤ $y = (2x+1)(2x-1)$

해설

$y = ax^2 + bx + c$에서 $a < 0$ 일 때 이차함수가 최댓값을 갖는다.

8. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x의 범위가 $-2 \le x \le 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 6 ⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow \quad y = (x-1)^2 - 3$
$-2 \le x \le 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,
$x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.
$\therefore$ 최댓값 : $(-2-1)^2 - 3 = 6$

9. 방정식$|x-3|+|x-4|=2$의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

i) $x<3$일 때,
$-(x-3)-(x-4)=3,\ -2x=-5$
$\therefore\ x=\frac{5}{2}$
ii) $3\le x<4$일 때
$(x-3)-(x-4)=2,\ 0\cdot x=1$
$\therefore$ 해가 없다.
iii) $x\ge 4$일 때
$x-3+x-4=2,\ 2x=9$
$\therefore\ x=\frac{9}{2}$
따라서 $x=\frac{5}{2},\ \frac{9}{2}$이고 그 합은 7

10. 실수 a, b에 대하여 연산$*$를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x * (x - 6) = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha + 2\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x * (x - 6) = 0$ 에서
$x^2 + x - 6 = 0$
$(x + 3)(x - 2) = 0$
$\therefore\ x = -3,\ 2$
$\therefore\ \alpha = -3,\ \beta = 2\ (\alpha < \beta)$
$\therefore \alpha + 2\beta = 1$

11. $x^2+ax+b=0,\ x^2+2bx+3a=0$를 동시에 만족하는 x는 -1밖에 없을 때, 상수 ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$x=-1$은 두 이차방정식 $x^2+ax=b=0$,
$x^2+2bx+3a=0$의 공통근이므로
$1-a+b=0,\ 1-2b+3a=0$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-3,\ b=-4$
$\therefore ab=12$

12. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 다음 [보기]의 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

㉠ $ax^2+2bx+c=0$	㉡ $ax^2+\frac{1}{2}bx+c=0$
㉢ $cx^2+bx+a=0$	

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로
$D=b^2-4ac>0\cdots$
㉠ $ax^2+2bx+c=0$의 판별식은
$D=(2b)^2-4ac=4b^2-4ac$
$=3b^2+(b^2-4ac>0)$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
㉡ [반례] $a=1,\ b=3,\ c=2$일 때
$x^2+3x+2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지만
$x^2+\frac{3}{2}x+2=0$은 허근을 갖는다.
㉢ $cx^2+bx+a=0$의 판별식은
$D=b^2-4ac>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

13. x에 대한 이차방정식 $x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D=0$

$D=(2m+a+b)^2-4(m^2+ab)=0$

$4m^2+a^2+b^2+4ma+2ab+4mb-4m^2-4ab=0$

m에 관해 식을 정리하면

$(4a+4b)m+(a^2-2ab+b^2)=0$

$4a+4b=0, \quad a^2-2ab+b^2=0$

$\therefore a+b=0$

14. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 b를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}$, 4를 얻었고, c를 잘못 보아 -1, 4의 두 근을 얻었다. 이 때, 옳은 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

(ⅰ) b를 잘못 본 경우
a와 c는 옳으므로 두 근의 곱은
$\frac{1}{2}\cdot 4=\frac{c}{a}$ $\quad\therefore c=2a$
(ⅱ) c를 잘못 본 경우
a와 b는 옳으므로 두 근의 합은
$-1+4=3=-\frac{b}{a}$ $\quad\therefore b=-3a$
(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식은
$ax^2-3ax+2a=0$
$a\neq 0$이므로 $x^2-3x+2=0$
$(x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$
따라서 근의 합은 3이다.

15. 다음 x의 이차방정식의 두 실근의 절댓값이 같고, 부호가 다르게 실수 m의 값을 정하면?

$$3(x-1)(x-m)-x(7-m^2)=18-m^2$$

① -4　　② -2　　③ 0　　④ 2　　⑤ 4

해설

두 근의 절댓값이 같고 부호가 다를 조건은
$\alpha+\beta=0$, $\alpha\beta<0$
준식을 x에 관해서 정리하면,
$3x^2+(m^2-3m-10)x+m^2+3m-18=0$
따라서, $\alpha+\beta=\dfrac{-(m^2-3m-10)}{3}=0$,
즉 $m^2-3m-10=0$
$(m-5)(m+2)=0 \quad \therefore\ m=5,\ -2 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$\alpha\beta=\dfrac{m^2+3m-18}{3}<0$, $m^2+3m-18<0$
$(m-3)(m+6)<0 \quad \therefore\ -6<m<3 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통범위에 의해 $m=-2$

16. 점 $(0,\ -2)$ 를 지나고 이차함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 에 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $y = x - 1$ 또는 $y = -x - 2$

② $y = x - 2$ 또는 $y = -3x - 1$

③ $y = 2x - 2$ 또는 $y = -6x - 2$

④ $y = 3x - 3$ 또는 $y = x + 1$

⑤ $y = 4x - 4$ 또는 $y = 5x + 3$

해설

점 $(0,\ -2)$ 를 지나는 직선의 방정식을 $y = mx - 2$ 라 하고
이 식과 이차함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 를 연립하면
$x^2 - 2x + 2 = mx - 2,\ x^2 - (m+2)x + 4 = 0$
이 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식 $D = 0$ 이다.
$D = (m+2)^2 - 4 \cdot 4 = 0$
$m^2 + 4m - 12 = 0\ (m+6)(m-2) = 0$
$\therefore m = 2$ 또는 $m = -6$
따라서, 구하는 직선의 방정식은
$y = 2x - 2$ 또는 $y = -6x - 2$

17. 이차함수 $y = \frac{2}{3}x^2 - 4ax - 6a$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 7 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행 이동하였더니 최솟값이 -3 이 되었다. 이 때, 상수 a 의 값은? (단, $a < 0$)

① 0　② 1　③ -1　④ 2　⑤ -2

해설

$y = \frac{2}{3}x^2 - 4ax - 6a$
$= \frac{2}{3}(x^2 - 6ax + 9a^2 - 9a^2) - 6a$
$= \frac{2}{3}(x - 3a)^2 - 6a^2 - 6a$

$y = \frac{2}{3}(x - 3a)^2 - 6a^2 - 6a$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 7 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행 이동한 식은

$y = \frac{2}{3}(x - 3a - 7)^2 - 6a^2 - 6a - 3$ 이다.

최솟값이 -3 이므로

$-6a^2 - 6a - 3 = -3$, $6a(a + 1) = 0$

$\therefore a = -1$ or 0

$\therefore a = -1 (\because a < 0)$

18. 삼차방정식 $x^3-7x^2+9x+9=0$의 근 중에서 무리수인 두 근을 a, b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① -6　② -2　③ 2　④ 4　⑤ 8

해설

방정식을 인수분해하면 $x^3-7x^2+9x+9=0$
$(x-3)(x^2-4x-3)=0$
$x^2-4x-3=0$의 두 근이 a, b($\because$ 무리수)
$a+b=4$

19. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서
$x^2-2x=t$ 로 놓으면
$t(t-2)-3=0$,
$t^2-2t-3=0$
$(t-3)(t+1)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$
(i) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$
(ii) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$\therefore\ x=1$ (중근)
따라서, $-1\times3\times1=-3$

20. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{51} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 에서
$(x^2 - x + 1)(x + 1) = 0$
$\therefore x^3 + 1 = 0$
$x^3 = -1$
$x^{51} = (x^3)^{17} = (-1)^{17} = -1$

21. 다음 연립방정식의 해가 <u>아닌</u> 것은?

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

① $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$ ② $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$

④ $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

해설

$x^2 - xy - 2y^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x+y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = -y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = -y$ $2x^2 + y^2 = 2y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm\sqrt{3}, \quad x = \mp\sqrt{3}$

ii) $x = 2y$ $2x^2 + y^2 = 8y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm 1, \quad x = \pm 2$

$\therefore$ 해 : $\begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x = + - 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

(복부호동순)

22. a, b는 실수라 한다. x에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2+a^2x+b^2-2a=0$, $x^2-2ax+a^2+b^2=0$이 오직 하나의 공통근을 가질 때, $a+b$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

공통근을 α라 하면
$\alpha^2+a^2\alpha+b^2-2a=0 \quad \cdots ①$
$\alpha^2-2a\alpha+a^2+b^2=0 \quad \cdots ②$
① − ② 하면 $(a^2+2a)\alpha-(a^2+2a)=0$
$\therefore\ (a^2+2a)(\alpha-1)=0$
$\therefore\ a^2+2a=0$ 또는 $\alpha=1$
그런데 $a^2+2a=0$일 때는 $a^2=-2a$이므로
두 방정식이 일치하게 되어 문제의 뜻에 어긋난다.
$\therefore\ \alpha=1$
①에 대입하면 $1+a^2+b^2-2a=0$
$\therefore\ (a-1)^2+b^2=0$
a, b는 실수이므로 $a-1=0$, $b=0$
$\therefore\ a+b=1$

23. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=k \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 의 해가 오직 한 쌍이기 위한 실수 k 의 값은 $k_1,\ k_2$ 의 두 개다. 이 때, k_1k_2 의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$\begin{cases} x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+k$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+2(-x+k)^2=4$

$3x^2-4kx+2k^2-4=0 \quad \cdots ㉢$

이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-3(2k^2-4)=0$

$4k^2-6k^2+12=0,\ k^2=6$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{6}$

$\therefore\ k_1k_2=\sqrt{6}\times(-\sqrt{6})=-6$

24. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - 4x + k = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) = \alpha\beta\gamma$를 만족할 때, k의 값을 구하면?

① 7　　② 6　　③ 5　　④ 4　　⑤ 3

해설

$\alpha+\beta+\gamma = 2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = -4,\ \alpha\beta\gamma = -k$ 이므로

$\alpha+\beta = 2-\gamma,\ \beta+\gamma = 2-\alpha,\ \gamma+\alpha = 2-\beta$

주어진 식은 $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma) = \alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8 - 4(\alpha+\beta+\gamma) + 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8 - 8 - 8 + k = -k$

$\therefore\ k = 4$

25. 방정식 $x^5-3x^4+x^3+x^2-3x+1=0$ 의 근 중에서 실근을 α, β, γ 라 하고, 두 허근을 w_1, w_2 라 할 때, $\alpha\beta\gamma+w_1w_2$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

주어진 방정식은 홀수차 상반방정식이므로
$x+1$ 을 인수로 갖는다.

$\therefore\ (x+1)(x^4-4x^3+5x^2-4x+1)=0,$

$x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=0\ (\because\ x\neq 0)$

$\therefore\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$

$\therefore\ x+\frac{1}{x}=1,\ 3$

(i) $x+\frac{1}{x}=1$ 에서 $x^2-x+1=0$

$\therefore\ w_1w_2=1$

(ii) $x+\frac{1}{x}=3$ 에서 $x^2-3x+1=0$

$\therefore\ \alpha\beta=1$

$\therefore\ \alpha\beta\gamma+w_1w_2=-1+1=0\ (\because\ \gamma=-1)$