1. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$ 의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$ 일 때, 유리수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$ 를 주어진 방정식에 대입하면
 $(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$
이 식을 정리하면
 $(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$
무리수가 서로 같은 조건에 의하여
 $260 - 26m = 0, 160 - 16m = 0$
따라서, $m = 10$
계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$ 가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$ 도 근이다.
나머지 한 근을 α 라고 하면 근과 계수와의 관계에서
 $(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m \dots\dots\textcircled{1}$
 $(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4 \dots\dots\textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 에서 $\alpha = m - 8 \dots\dots\textcircled{3}$
 $\textcircled{2}$ 에서 $8\alpha = 2m - 4 \dots\dots\textcircled{4}$
 $\textcircled{3}$ 을 $\textcircled{4}$ 에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$
 $\therefore m = 10$

2. 삼차방정식 $x^3 - px + 2 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma}$ 의 값은?

- ① $-p$ ② p ③ 0 ④ 3 ⑤ -3

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 0$ 이므로 주어진 식은 $\frac{-\alpha}{\alpha} + \frac{-\beta}{\beta} + \frac{-\gamma}{\gamma} = -3$ 이 된다.

3. 실수 x, y, z 가 $x + y + z = 2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $x^3 + y^3 + z^3 = 20$ 을 만족할 때, $x - 2y + z$ 의 값을 구하면? (단, $x < y < z$)

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$$x + y + z = 2 \dots \textcircled{1}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14 \dots \textcircled{2}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 20 \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$xy + yz + zx = -5 \dots \textcircled{4}$$

$$x^3 + y^3 + z^3$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$$

$$= 20$$

$$\therefore xyz = -6 \dots \textcircled{5}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{4}, \textcircled{5}$ 을 이용하여 x, y, z 를

세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면

$$t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0(t - 1)(t + 2)(t - 3) = 0$$

$$t = 1, -2, 3$$

$$x < y < z \text{이므로 } x = -2, y = 1, z = 3$$

$$\therefore x - 2y + z = -1$$

4. 삼차방정식 $x^3 - ax - b = 0$ 의 한 근이 $1 - \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

방정식 $x^3 - ax - b = 0$ 의 계수가 유리수이므로

세 근을 $1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, \alpha$ 라고 하면

$$(1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) + \alpha = 0 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})\alpha + (1 - \sqrt{2})\alpha = -a \quad \cdots \text{㉡}$$

$$(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})\alpha = b \quad \cdots \text{㉢}$$

㉠에서 $\alpha = -2$ 를 ㉡에 대입하면

$$-a = 1 - 2 - 2 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} = -5 \quad \therefore a = 5$$

$$\alpha = -2 \text{를 ㉢에 대입하면 } b = -2(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 2$$

$$\therefore a + b = 5 + 2 = 7$$

5. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 2$

㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢

② ㉡

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$$x^3 - 1 = 0,$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$\omega^2 = -1 - \omega \cdots \text{㉠, ㉡}$$

$$\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots \text{㉢}$$

$$\omega^{1005} + \omega^{1004}$$

$$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$$

$$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots \text{㉣}$$

$$\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots \text{㉤}$$