1. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$일 때, 유리수 m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$를 주어진 방정식에 대입하면

$(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$

이 식을 정리하면

$(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$

무리수가 서로 같은 조건에 의하여

$260 - 26m = 0$, $160 - 16m = 0$

따라서, $m = 10$

계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수와의 관계에서

$(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m \quad \cdots\cdots ㉠$

$(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠에서 $\alpha = m - 8 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡에서 $8\alpha = 2m - 4 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉢을 ㉣에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$

$\therefore\ m = 10$

2. 삼차방정식 $x^3 - px + 2 = 0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 할 때, $\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha} + \dfrac{\gamma+\alpha}{\beta} + \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$의 값은?

① $-p$ ② p ③ 0 ④ 3 ⑤ -3

해설

$\alpha+\beta+\gamma=0$이므로 주어진 식은 $\dfrac{-\alpha}{\alpha}+\dfrac{-\beta}{\beta}+\dfrac{-\gamma}{\gamma}=-3$이 된다.

3. 실수 x, y, z가 $x+y+z=2,\ x^2+y^2+z^2=14,\ x^3+y^3+z^3=20$을 만족할 때, $x-2y+z$의 값을 구하면? (단, $x<y<z$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x+y+z=2\ldots$㉠
$x^2+y^2+z^2=14\ldots$㉡
$x^3+y^3+z^3=20\ldots$㉢
㉠,㉡에서
$xy+yz+zx=-5\ldots$㉣
$x^3+y^3+z^3$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$
$=20$
$\therefore xyz=-6\ldots$㉤
㉠, ㉣, ㉤을 이용하여 $x,\ y,\ z$를
세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면
$t^3-2t^2-5t+6=0(t-1)(t+2)(t-3)=0$
$t=1,\ -2,\ 3$
$x<y<z$이므로 $x=-2\ y=1\ z=3$
$\therefore\ \ x-2y+z=-1$

4. 삼차방정식 $x^3-ax-b=0$의 한 근이 $1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

방정식 $x^3-ax-b=0$의 계수가 유리수이므로
세 근을 $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$, α라고 하면
$\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)+\alpha=0 \quad \cdots ㉠$
$\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)\alpha+\left(1-\sqrt{2}\right)\alpha=-a \quad \cdots ㉡$
$\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)\alpha=b \quad \cdots ㉢$
㉠에서 $\alpha=-2$를 ㉡에 대입하면
$-a=1-2-2-2\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}=-5 \quad \therefore\ a=5$
$\alpha=-2$를 ㉢에 대입하면 $b=-2(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=2$
$\therefore\ a+b=5+2=7$

5. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

ㄴ $\omega^2 = 1$

ㄷ $\omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}} = 2$

ㄹ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

ㅁ $\omega^{18} + \omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㄱ, ㄷ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ, ㄹ

④ ㄷ, ㄹ, ㅁ　⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

해설

$x^3 - 1 = 0,$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$

$\omega^2 = -1 - \omega \cdots$ ㄱ, ㄴ

$\omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^{33} + \dfrac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots$ ㄷ

$\omega^{1005} + \omega^{1004}$

$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$

$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots$ ㄹ

$\omega^{18} + \omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \dfrac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots$ ㅁ