1. 복소수 $z = (2+i)a^2 + (1+4i)a + 2(2i-3)$이 순허수일 때, 실수 a의 값은?

① -2　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

해설

$z = (2a^2 + a - 6) + (a^2 + 4a + 4)i$
순허수이므로 $2a^2 + a - 6 = 0$
$\Rightarrow \quad (a+2)(2a-3) = 0$
$\Leftrightarrow \; a = -2$ 또는 $a = \frac{3}{2}$
그런데 $a = 2$이면,
$a^2 + 4a + 4 = 0$이 되어 순허수가 성립되지 않는다.
$\therefore \quad a = \frac{3}{2}$

2. 등식 $3x-2yi=(2+i)^2$이 성립하는 x, y에 대하여 두 수를 곱하면?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$3x-2yi=(2+i)^2=3+4i$

$x=1$, $y=-2$

$\therefore\ xy=-2$

3. $i+i^3+i^5+i^7+\cdots+i^{101}=a+bi$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

(좌변)$=i-i+i-i+\cdots+i=i$ 이므로
$i=a+bi$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=0$, $b=1$
$\therefore\ a+b=1$

4. 임의의 두 복소수 a, b 에 대하여 연산 $\oplus$ 를 $a \oplus b = ab - (a + b)$ 로 정의한다. $\mathrm{Z} = \dfrac{5}{2 - \mathrm{i}}$ 일 때, $\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}}$ 의 값은?

① 1　② $1 + 2i$　③ $1 - 2i$
④ -1　⑤ $2 - 2i$

해설

$\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}} = Z\overline{Z} - (Z + \overline{Z})$, $Z = 2 + i$, $\overline{Z} = 2 - i$ 이므로 연산을 계산해보면, $5 - 4 = 1$ 답은 ①

5. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 5$ 의 최솟값은?

① -14 ② 14 ③ -5 ④ 5 ⑤ 4

해설

$y = x^2 - 6x - 5$
$= x^2 - 6x + 9 - 9 - 5$
$= (x - 3)^2 - 14$
$\therefore x = 3$ 일 때, 최솟값 -14 를 가진다.

6. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$　② 0　③ $\frac{1}{2}$　④ 1　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x + 1)^2 + k + 3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k+3)$ 이다.
주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.
$\therefore\ k + 3 = \frac{5}{2}$　$\therefore\ k = -\frac{1}{2}$

7. $-2 \le x \le 2$ 에서 함수 $y = -x^2 + 4x + k$ 의 최댓값이 6 일 때, 최솟값은?

① -14　② -12　③ -10　④ -8　⑤ -6

해설

$y = -x^2 + 4x + k = -(x-2)^2 + k + 4$ 이므로
$x = 2$ 일 때 y 의 최댓값은 $k + 4$ 이다.
따라서 $k + 4 = 6$ 에서 $k = 2$
$-2 \le x \le 2$ 에서 $y = -(x-2)^2 + 6$ 은 $x = -2$ 일 때 최솟값을 가지며, 최솟값은 -10 이다.

8. 함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 x의 범위가 $0 < x < 1$ 일 때, 이 함수의 함숫값의 범위를 구하면?

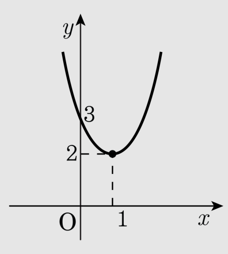
① $-2 < y < 3$　② $-2 < y < 2$　③ $0 < y < 3$

④ $0 < y < 2$　⑤ $2 < y < 3$

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

따라서 함수의 그래프는 다음의 그림과 같다.



$f(0) = 3,\ f(1) = 2$ 이므로

함숫값의 범위는 $2 < y < 3$

9. 다음 내용은 이차방정식에 대한 설명이다. 괄호 안에 알맞은 것은?

(가) 를 계수로 갖는 이차방정식은 (나) 의 범위에서 항상 근을 갖는다. 따라서 (다) 를 계수로 갖는 이차식 ax^2+bx+c 는 (라) 의 범위에서는 반드시 (마) 의 곱으로 인수분해된다.

① (가) 복소수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 실수 (마) 이차식

② (가) 복소수 (나) 실수 (다) 복소수 (라) 실수 (마) 일차식

③ (가) 복소수 (나) 실수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

④ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

⑤ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 일차식

해설

(가) 실수, (나) 복소수, (다) 실수, (라) 복소수, (마) 일차식

10. x에 대한 방정식 $ix^2+(1+i)x+1=0$의 해를 구하여라. (단, $x \neq i$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

양변에 $-i$를 곱하면

$(-i)\cdot ix^2-i(1+i)x-i=0$

$x^2+(1-i)x-i=0$

$(x-i)(x+1)=0$

$x \neq i$이므로 $x=-1$

11. 방정식 $x^2-2|x|-3=0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때
$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$
$x=-1$ 또는 $x=3$
그런데 $x \geq 0$이므로 $x=3$
ⅱ) $x<0$일 때
$x^2+2x-3=0$, $(x-1)(x+3)=0$
$x=1$ 또는 $x=-3$
그런데 $x<0$이므로 $x=-3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3$ 또는 $x=-3$
따라서 근의 합은 0이다.

12. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

▷ 정답 : $b=2$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=1\pm i$를 대입하여 정리하면
$1+2i-1+a(1+i)+b=0$과
$a+b+(a+2)i=0$이다.
위 식을 정리하면 $a+b=0$과 $a+2=0$에서
$a=-2, b=2$이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켤레복소수 근을 갖는다.
따라서 두 근은 $1+i,\ 1-i$
근과 계수의 관계에서
$-a=(1+i)+(1-i)=2 \qquad \therefore a=-2$
$b=(1+i)(1-i)=2 \qquad \therefore b=2$

13. $x^2 - 4kx + (5-k^2) = 0$이 두 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$D/4 = 4k^2 - (5-k^2) \geq 0$

$4k^2 - 5 + k^2 \geq 0$, $5k^2 \geq 5$, $\therefore k^2 \geq 1$

$\alpha + \beta = 4k$, $\alpha\beta = 5 - k^2$

$$\begin{aligned} \therefore\ \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 16k^2 - 10 + 2k^2 \\ &= 18k^2 - 10 \end{aligned}$$

$18k^2 \geq 18$, $18k^2 - 10 \geq 18 - 10$

$\alpha^2 + \beta^2 \geq 8$, $\therefore$ (최솟값)$= 8$

14. 이차방정식 $x^2 - 6x + 2k = 0$의 두 근의 비가 $1 : 2$일 때, 상수 k의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

두 근의 비가 $1 : 2$이면 두 근을
$\alpha,\ 2\alpha$(단, $\alpha \neq 0$)라 놓을 수 있다.
$x^2 - 6x + 2k = 0$의 두 근이 $\alpha,\ 2\alpha$이므로
근과 계수의 관계에서 $\alpha + 2\alpha = 3\alpha = 6$ ······ ㉠
$\alpha \cdot 2\alpha = 2\alpha^2 = 2k$ ······ ㉡
㉠에서 $\alpha = 2$
㉡에서 $k = \alpha^2 \quad \therefore\ k = 4$

15. 이차다항식 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 두근의 합이 12일 때, 이차방정식 $f(2x)=0$의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하고

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$라 놓으면

$f(2x)=a(2x-\alpha)(2x-\beta)=0$

$a\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=0$, $\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=0$

$\alpha+\beta=12$ 이므로

이 방정식의 두 근 $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ 의 합은

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{12}{2}=6$

16. 실계수 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+i$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ -1 ④ -2 ⑤ 4

해설

실계수 방정식에서 $2+i$가 근이면 $2-i$도 근이다.
따라서 두 근의 합 $-a=4$ $\therefore$ $a=-4$
두 근의 곱 $b=5$
$a+b=1$

17. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + 4ax$ 의 최솟값이 -8 일 때, a 의 값을 구하여라.(단, $a < 0$)

▶ 답:

▷ 정답: $a = -1$

해설

$y = \frac{1}{2}x^2 + 4ax$
$= \frac{1}{2}(x^2 + 8ax)$
$= \frac{1}{2}(x + 4a)^2 - 8a^2$
최솟값 $-8a^2 = -8$, $a^2 = 1$
$\therefore a = -1 (\because a < 0)$

18. 둘레의 길이가 $24\,\text{cm}$ 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때, 이 부채꼴의 호의 길이를 구하여라.

▶ 답: ______ cm

▷ 정답: 12 cm

해설

반지름 $x\,\text{cm}$, 호의 길이를 $(24-2x)\,\text{cm}$ 라 두면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x(24-2x) \\ &= x(12-x) \\ &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x+36)+36 \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이가 $6\,\text{cm}$ 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $36\,\text{cm}^2$ 를 가진다.
따라서 호의 길이는 $24-2x=12\,\text{cm}$ 이다.

19. 방정식 $x^3-x^2-11x+3=0$의 유리수 근이 아닌 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{6}$

해설

$x^3-x^2-11x+3=0$

$(x+3)(x^2-4x+1)=0$

$\therefore\ x=-3,\ 2\pm\sqrt{3}$

$\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1}$

$=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2+1}$

$=\sqrt{8+4\sqrt{3}}+\sqrt{8-4\sqrt{3}}$

$=\sqrt{8+2\sqrt{12}}+\sqrt{8-2\sqrt{12}}$

$=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{2})=2\sqrt{6}$

20. $2-\sqrt{3}$이 방정식 $x^3-2x^2+px+q=0$의 한 근임을 이용하여 유리수 p, q의 값을 구하면?

① $p=-7,\ q=2$　　② $p=7,\ q=-3$
③ $p=4,\ q=1$　　④ $p=3,\ q=-2$
⑤ $p=2,\ q=\sqrt{3}$

해설

$x^3-2x^2+px+q=0$의 한 근이 $2-\sqrt{3}$이면 $2+\sqrt{3}$도 근이다.
다른 한근을 α라 하면 세 근의 합에서
$2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+\alpha=4+\alpha=2$이므로
$\alpha=-2$
따라서 $p=-2(2-\sqrt{3})-2(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$
$=-4+2\sqrt{3}-4-2\sqrt{3}+4-3=-7$이므로 $p=-7$
또 세근의 곱 $-q=(-2)(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=-2(4-3)=-2$
따라서 $q=2$

21. x에 대한 삼차방정식 $x^3-ax^2+5x-b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3-ax^2+5x-b=0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근을 $1-\sqrt{2}$, 나머지 한 근을 β라 하면

$\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)\beta+\left(1-\sqrt{2}\right)\beta=5$

$-1+2\beta=5,\ 2\beta=6 \quad \therefore\ \beta=3$

따라서, $a=\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)+3=5$

$b=\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot 3=-3$이므로

$a+b=5+(-3)=2$

22. 사차방정식 $x^4-5x^2+4=0$의 서로 다른 실근은 모두 몇 개인가?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$x^4-5x^2+4=0 \quad \Rightarrow \quad (x^2-4)(x^2-1)=0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)(x-2)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore \; x=2$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1$

23. $x=\alpha,\ y=\beta$가 연립방정식

$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=-2 \\ 2x^2-3xy-2y^2=-3 \end{cases}$ 의 해일 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=-2 & \cdots ① \\ 2x^2-3xy-2y^2=-3 & \cdots ② \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ①$\times 3-$②$\times 2$하면

$x^2-3xy+2y^2=0,\ (x-2y)(x-y)=0,$

$x=2y\ or\ x=y$

$x=2y$를 ① 식에 대입하면

$4y^2-2y^2-2y^2=-2,\ 0=-2$불능

$x=y$를 ①식에 대입하면

$y^2-y^2-2y^2=-2$

$y^2=1,\ y\pm 1,\ x\pm 1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=1+1=2$

24. $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 값을 차례대로 구하여라.

(1) $\omega^{20}+\omega^{10}+1$
(2) $\omega^{101}+\overline{\omega}^{101}-\omega^{11}\cdot\overline{\omega}-\omega\cdot\overline{\omega}^{11}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

▷ 정답 : 2

해설

ω가 x^2-x+1의 근이므로
$\overline{\omega}$도 x^2-x+1의 근이다.
즉, $\omega^3=-1,\ \overline{\omega}^3$
$=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$
(1) $\omega^{20}+\omega^{10}+1$
$=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega+1$
$=(-1)^6\cdot\omega^2+(-1)^3\cdot\omega+1$
$=\omega^2-\omega+1=0$

(2) $\omega^{101}+\overline{\omega}^{101}-\omega^{11}\overline{\omega}-\omega\overline{\omega}^{11}$
$=(\omega^3)^{33}\cdot\omega^2+(\overline{\omega}^3)^{33}\cdot\overline{\omega}^2-$
$\omega\overline{\omega}\left\{(\omega^3)^3\cdot\omega+(\overline{\omega}^3)^3\cdot\overline{\omega}\right\}$
$=(-1)\omega^2+(-1)\overline{\omega}^2-\left\{(-1)\omega+(-1)\overline{\omega}\right\}$
$=-(\omega^2-\omega)-(\overline{\omega}^2-\overline{\omega})$
$=-(-1)-(-1)=2$

25. 다음 x에 관한 두 개의 이차방정식 $\begin{cases} x^2-2x+a^2=0 & \cdots ㉠ \\ x^2-ax+2a=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 에서 공통근이 오직 한 개일 때, a의 값과 공통근 k를 구하면?(단, a는 실수)

① $a=0$일 때 $k=0$, $a=-1$일 때, $k=1$

② $a=2$일 때 $k=1\pm\sqrt{3}i$

③ $a=1$일 때 $k=1$, $a=2$일 때, $k=1$

④ $a=3$일 때 $k=2\pm\sqrt{3}$

⑤ $a=2$일 때 $k=-1$, $a=3$일 때, $k=1$

해설

공통근을 $x=k$라 하면

$k^2-2k+a^2=0 \quad \cdots ①$

$k^2-ka+2a=0 \quad \cdots ②$

두 식을 빼주면, $(k+a)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $k=-a$

ⅰ) $a=2$일 때

㉠, ㉡이 같아지므로 성립하지 않는다.

ⅱ) $k=-a$일 때

①에 넣으면 $a=0$ 또는 $a=-1$

$\begin{cases} a=0 \text{ 이면 } k=0 \\ a=-1 \text{ 이면 } k=1 \end{cases}$