

1. 이차방정식 $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 6a^2 - a - 6 = 0$ 이 원의 방정식이 될 때 다음 중 a 가 가질 수 없는 정수 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(x + a)^2 + (y - 2a)^2 = -(a^2 - a - 6)$
이것이 원을 나타내려면 $-(a^2 - a - 6) > 0$
즉 $a^2 - a - 6 < 0$
 $\therefore -2 < a < 3$

2. 다음 두 원의 위치관계 중 서로 다른 두 점에서 만나는 경우를 모두 고른 것은?

- ㉠ $x^2 + y^2 = 1, \quad (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
- ㉡ $(x + 1)^2 + y^2 = 2, \quad x^2 + (y + 3)^2 = 2$
- ㉢ $x^2 + y^2 = 2, \quad (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$
- ㉣ $x^2 + y^2 = 4, \quad (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$
- ㉤ $x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

- ① ㉠
- ② ㉠, ㉤
- ③ ㉡
- ④ ㉢, ㉣
- ⑤ ㉡, ㉤

해설

서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는
 $|r - r'| < d < |r + r'|$ 이어야 한다.
㉠ 만나지 않는다.
㉢ 내접한다.
㉣ 외접한다.

3. 두 원 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 = 0$, $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 의 공통현의 방정식은?

① $x - 5y + 4 = 0$

② $4x - 3y + 4 = 0$

③ $3x - 3y + 4 = 0$

④ $x - y + 4 = 0$

⑤ $2x - y + 1 = 0$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 - (x^2 + y^2 - 4y) = 0$$

$$2x - 2y + 8 = 0$$

$$\therefore x - y + 4 = 0$$

4. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라

하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고

반지름의 길이는 1 이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로

이 원의 중심을 C_2 이라 하면

점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고

반지름의 길이는 4 이다.

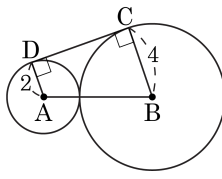
$\overline{C_1 C_2} = 5$ 이고

두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로

두 원은 서로 외접하게 된다.

따라서 공통접선은 3 개이다.

5. 다음 그림과 같이 서로 외접하는 두 원 A 와 B 의 반지름의 길이는 각각 2 와 4 이다. 두 원과 공통외접선의 교점을 각각 C, D 라 할 때, 사각형 ABCD 의 넓이를 구하면?



- ① $8\sqrt{2}$ ② $10\sqrt{2}$ ③ $12\sqrt{2}$
 ④ $16\sqrt{2}$ ⑤ $18\sqrt{2}$

해설

피타고라스의 정리에 의하여 변 CD 의 길이는

$$\sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

따라서 사각형 ABCD 의 넓이는

$$\frac{(2 + 4)4\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2} \text{ 이다.}$$

6. 원 $x^2 + y^2 = 13$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 방정식은 $ax + by = 13$ 이다. $a + b$ 의 값은?

① -13 ② -1 ③ 0 ④ 4 ⑤ 5

해설

접점이 주어졌을 때 접선의 방정식 구하는 공식

$x_1x + y_1y = r^2$ 을 이용하면,

$2x + 3y = 13$ $a = 2, b = 3$ $\therefore a + b = 5$

7. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x+2, y-1)$ 에 의하여 점 $(-4, 8)$ 은 점 (a, b) 로 옮겨진다. 이때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

평행이동 f 는 x 축의 방향으로 $+2$, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하는 변환이므로 $(-4 + 2, 8 - 1) = (a, b)$ 따라서 $a = -2, b = 7$

8. 점 A(4, 0)과 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 넓이는?

- ① $\frac{\pi}{6}$
- ② $\frac{\pi}{2}$
- ③ $\frac{\pi}{3}$
- ④ $\frac{\pi}{4}$
- ⑤ π

해설

$x^2 + y^2 = 4$ 위의 점을 $P(a, b)$ 라 하면

$A(4, 0), P(a, b)$ 의 중점의 좌표 $M(x, y)$ 는

$M\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 이다.

$\therefore x = \frac{a+4}{2}, y = \frac{b}{2}$

$\therefore a = 2x - 4, b = 2y$

이 때, 점 P 는 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로 $a^2 + b^2 = 4$ 가 성립한다.

$(2x - 4)^2 + (2y)^2 = 4, (x - 2)^2 + y^2 = 1$

따라서 구하는 중점의 자취는 중심이 (2, 0) ,

반지름의 길이가 1인 원이므로

원이 넓이 S 는 $S = \pi \cdot 1^2 = \pi$

9. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x+3)^2 + (y-4)^2 = r^2$ 이 서로 다른 두 점에서 만날 때, r 의 범위는 $a < r < b$ 이다. 이 때, $3a - b$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

두 원이 두 점에서 만나려면 반지름 길이의 합이 중심 사이 거리보다 크고, 반지름 길이의 차가 중심 사이 거리보다 작아야 한다.

$\Rightarrow$ 중심사이 거리는 5,

반지름 길이의 합은 $1 + r$,

반지름 길이 차는 $r - 1$ 이다.

$\therefore r + 1 > 5, r - 1 < 5$

$\Rightarrow 4 < r < 6$

$\therefore 3a - b = 6$

10. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x + 6y = 7$ 의 공통현의 길이를 구하면?

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

두 원의 교점을 P, Q 라 하고 $\overline{PQ}$ 의 중점을 H 라 하면
 $\triangle OPH$ 는 직각삼각형이고,

$\overline{OP}$ 의 길이는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 반지름이므로 1이다.

두 원의 공통현의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 1) - (x^2 + y^2 - 6x + 6y - 7) = 0,$$

$$\text{즉 } x - y + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심 O(0, 0)에서

직선 $\textcircled{1}$ 에 이르는 거리

$$\overline{OH} = \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PH} &= \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OH}^2} \\ &= \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{PQ} = 2\overline{PH} = \sqrt{2}$$

11. 원 $x^2 + y^2 - 2ax - 2y - 4 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 + 2x + 2ay - 2 = 0$ 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a 의 값의 합은?

① -4 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

원 $x^2 + y^2 - 2ax - 2y - 4 = 0$ 이
원 $x^2 + y^2 + 2x + 2ay - 2 = 0$ 의 둘레를 이등분하려면
두 원의 공통현이
원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 의 중심을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
 $(1 + a)x + (a + 1)y + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $\textcircled{㉠}$ 이 점 $(-1, -a)$ 를 지나므로
 $(1 + a) \times (-1) + (a + 1) \times (-a) - 2 = 0$
 $a^2 + 2a = 0$
 $\therefore$ 근과 계수와의 관계에 의해 -2

12. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0, \quad 3x - 4y + 6 = 0$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$
따라서 , 원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선
 $3x - 4y + 6 = 0$ 까지의 거리 d 는
$$d = \frac{|17|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{17}{5}$$

이때, $\frac{17}{5} > 2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.
∴ 교점의 개수 : 0개

13. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1, -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이 2 와 같다.

$$\text{따라서, } \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$|a - 1| = 10$$

$$a - 1 = \pm 10$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 11$$

14. 원 밖의 점 $(1, -2)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 접선의 방정식을 구하면?

- ① $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ 또는 $x = 1$ ② $y = -\frac{2}{3}x - 3$ 또는 $x = 3$
 ③ $y = -x - \frac{3}{4}$ 또는 $x = -2$ ④ $y = -\frac{9}{5}x - \frac{5}{9}$ 또는 $x = -6$
 ⑤ $y = -4x - 3$ 또는 $x = 4$

해설

구하는 접선의 기울기를 m 이라고 하면

점 $(1, -2)$ 를 지나는 접선의 방정식은

$$y + 2 = m(x - 1)$$

$$\therefore mx - y - m - 2 = 0$$

이 직선이 중심이 $(0, 0)$ 이고

반지름의 길이가 1 인 원에 접하므로

$$\frac{|-m - 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1,$$

$$|m + 2| = \sqrt{m^2 + 1}$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$m^2 + 4m + 4 = m^2 + 1, 4m = -3$$

$$\therefore m = -\frac{3}{4}$$

따라서, 구하는 접선의 방정식은

$$y + 2 = -\frac{3}{4}(x - 1) \therefore y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

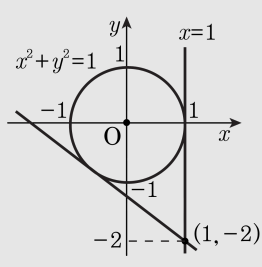
그런데 다음 그림에서 보듯이 직선 $x = 1$ 도

점 $(1, -2)$ 를 지나고

원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하는 직선임을 알 수 있다.

그러므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \text{ 또는 } x = 1$$



15. 좌표평면 위의 두 점 (2, 2), (9, 9) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

- ① $\frac{9}{2}$
- ② 5
- ③ $\frac{11}{2}$
- ④ 6
- ⑤ $\frac{13}{2}$

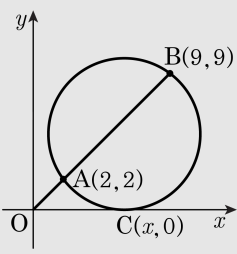
해설

다음 그림에서

$\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$

$\therefore x^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{9^2 + 9^2} = 36$

$\therefore x = 6$



16. 점 $(a-4, a-2)$ 를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 다음, $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점과 원점 사이의 거리가 2일 때, 처음 점의 좌표를 (p, q) 라 한다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(a-4, a-2) \rightarrow (a, a-2)$
(x 축으로 4만큼 평행이동)
 $(a, a-2) \rightarrow (a-2, a)$
($y = x$ 에 대칭이동)
($a-2, a$) 와 원점 사이의 거리는
 $\sqrt{(a-2)^2 + a^2} = 2$
 $2a^2 - 4a + 4 = 4,$
 $\therefore a = 2 \quad (\because a \neq 0)$
처음 점의 좌표 $(a-4, a-2)$ 에 $a = 2$ 를 대입하면
구하는 점의 좌표 $(p, q) = (-2, 0)$
 $\therefore p^2 + q^2 = 4$

17. 두 포물선 $y = x^2 - 6x + 10$ 과 $y = -x^2 + 2x - 5$ 가 점 P 에 대하여 대칭일 때, 점 P 의 좌표는?

- ① $\left(5, \frac{3}{2}\right)$ ② $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ ③ $(0, 2)$
④ $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ ⑤ $(2, 5)$

해설

$$y = x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$y = -x^2 + 2x - 5 = -(x - 1)^2 - 4 \cdots \textcircled{2}$$

포물선 ①, ②의 꼭짓점의 좌표는

각각 $(3, 1)$, $(1, -4)$ 이고

두 포물선이 점 P 에 대하여 대칭이므로

점 P 는 두 포물선의 꼭짓점의 중점이다.

$$\frac{3+1}{2} = 2, \quad \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}$$

따라서, 점 P 는 $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ 이다.

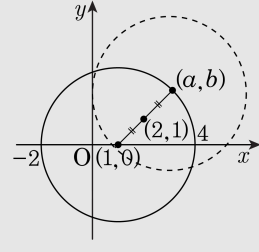
18. 원 $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ 을 점 $(2, 1)$ 에 대하여 대칭이동 한 원의 방정식은?

- ① $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ ② $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$
 ③ $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$ ④ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$
 ⑤ $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$

해설

$$x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = 9$$



대칭이동한 원의 중심을 (a, b) 라 하면 $\frac{1+a}{2} = 2, \frac{0+b}{2} = 1$

$$\therefore a = 3, b = 2$$

$$\therefore (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

19. 점 A(3, 4) 를 직선 $x - y + 2 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 라 할 때, A' 의 좌표는?

① (-3, 5)

② (-3, 8)

③ (3, 2)

④ (2, 5)

⑤ (5, 2)

해설

A' 를 (a, b) 라 하자

i) A' 과 (3, 4) 의 중점은 $x - y + 2 = 0$ 을 지난다.

$$\therefore \frac{a+3}{2} - \frac{b+4}{2} + 2 = 0$$

ii) A' 과 (3, 4) 를 잇는 직선과 직선 $x - y + 2 = 0$ 은 수직으로 만난다.

$$\therefore \frac{4-b}{3-a} = -1$$

i) 과 ii) 를 연립하여 a, b 를 구하면,

$$a = 2, b = 5$$

20. 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $(x - 9)^2 + y^2 = 9$ 의 공통외접선의 길이를 l 이라 하고 공통내접선의 길이를 m 이라 할 때, $l^2 - m^2$ 의 값은?

- ① 48 ② -48 ③ 32 ④ -32 ⑤ 30

해설

중심이 $(0, 0)$ $(9, 0)$ 이므로
중심간의 거리는 9이다.
 $\therefore l^2 = 9^2 - 1^2$

$\therefore m^2 = 9^2 - 7^2$
 $\therefore l^2 - m^2 = (9^2 - 1^2) - (9^2 - 7^2)$
 $= -1^2 + 7^2 = 48$

21. 두 원 $(x-a)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-2)^2 + (y-a)^2 = 4$ 이 직교할 때 a 의 값의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 원의 중심이 각각 $(a, 1)$, $(2, a)$ 이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-2)^2 + (1-a)^2}$ 이다.
두 원의 반지름은 각각 1, 2이므로
직교하기 위한 조건은
 $(a-2)^2 + (1-a)^2 = 1^2 + 2^2$
 $\therefore a^2 - 3a = 0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 3

22. 직선 $ax + by + 2 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하면서 움직일 때, 점 (a, b) 가 그리는 자취의 길이를 구하면?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

직선이 원에 접하므로 원의 중심과 직선 사이
거리는 원의 반지름과 같다.

$$\therefore \frac{|a \times 0 + b \times 0 + 2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4$$

$\therefore$ 점 (a, b) 가 그리는 자취길이는

$$2 \times 2 \times \pi = 4\pi$$

23. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 모두 양수이고 $b \geq a$)

보기

- ㉠ $c = b$ 이면 두 점에서 만난다.
- ㉡ $c = 2b$ 이면 만나지 않는다.
- ㉢ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이면 한 점에서 만난다.

- ① ㉠
- ② ㉠, ㉡
- ③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

원의 중심이 $(0, 0)$ 이므로 원의 중심에서 직선 $ax + by + c = 0$ 에 이르는 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

㉠ $d = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1$ 그러므로 교점은 2개다.

즉, $n(A \cap B) = 2$

㉡ $d = \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq \frac{2b}{\sqrt{2}b} > 1$ ($\because b \geq a$)

그러므로 교점은 없다.

㉢ $d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$

그러므로 교점은 1 개다.

따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참이다.

24. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 의 공통접선의 방정식을 구하면?

① $x = -2$, $y = -1$

② $x = 1$, $y = 1$

③ $x = -1$, $y = 1$

④ $x = 1$, $y = -1$

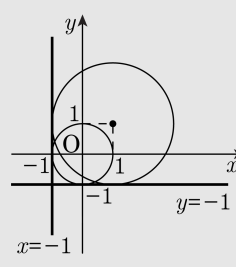
⑤ $x = -1$, $y = -1$

해설

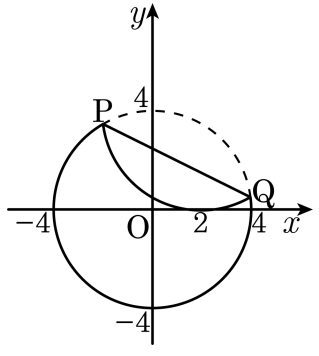
그림을 그려보면 두 개의 공통접선이

존재하고 그 식은 각각

$x = -1$, $y = -1$



25. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 16$ 을 점 $(2, 0)$ 에서 x 축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x 절편을 구하여라.

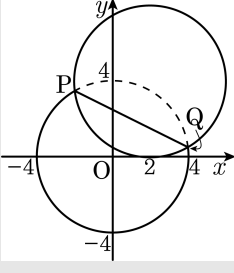


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2, 0)$ 에서 x 와 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ //



이때 선분 PQ는 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ 의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은
 $x^2 + y^2 - 16 - \{(x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 16\} = 0$
 $\therefore x + 2y - 5 = 0$
따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x 절편은 5이다.