1. $\frac{5}{1+2i} = x + yi$ 를 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x + y = -1$

해설

$\frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5(1-2i)}{5} = 1-2i$

$1 - 2i = x + yi$

$x = 1, y = -2, x + y = -1$

2. $i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 50i^{50}$ 의 값은?

① $-26 - 25i$　② $-26 + 25i$　③ 0

④ $-25 + 26i$　⑤ $25 + 26i$

해설

$i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 50i^{50}$

$= \{i + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-i) + 4 \cdot 1\} + \{5i + 6 \cdot (-1) + 7 \cdot (-i) + 8 \cdot 1\}$

$+ \cdots + \{45i + 46 \cdot (-1) + 47 \cdot (-i) + 48 \cdot 1\} + 49i + 50 \cdot (-1)$

$12(2 - 2i) + 49i - 50 = -26 + 25i$

3. 제곱해서 $5-12i$ 가 되는 복소수는?

① $\pm(2+3i)$ ② $\pm(2-3i)$ ③ $\pm(3-2i)$

④ $\pm(3+3i)$ ⑤ $\pm(3+3i)$

해설

구하려는 복소수를 $a+bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면

$(a+bi)^2 = a^2-b^2+2abi$ 에서

$a^2-b^2+2abi = 5-12i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=5$, $2ab=-12$ 에서

$ab=-6$, $b=-\dfrac{6}{a}$ 이므로

$a^2-\left(-\dfrac{6}{a}\right)^2=5$, $a^2-\dfrac{36}{a^2}=5$

양변에 a^2 을 곱하면

$a^4-5a^2-36=0$, $(a^2-9)(a^2+4)=0$

따라서 $a^2=9$ 또는 $a^2=-4$ 이므로

$a=\pm3$ 또는 $a=\pm2i$

그런데 a 는 실수이므로 $a=\pm3$ 이고, $b=\mp2$ 이다.

따라서 구하는 복소수는 $\pm(3-2i)$ 이다.

4. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
(2) $x^2-3\sqrt{2}x+6=0$

① (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

② (1) $\frac{3\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

③ (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{6}i}{2}$

④ (1) $\frac{1\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

⑤ (1) $\frac{4\pm 3i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$

$\therefore\ 5x^2-8x+4=0$

$\therefore\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{5}=\frac{4\pm 2i}{5}$

(2) $x=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-24}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

5. x에 대한 이차방정식 $kx^2+(2k+1)x+6=0$의 해가 $2,\ \alpha$일 때, $k+\alpha$의 값을 구하면?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

해가 $2, \alpha$라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.
$k \cdot 2^2+(2k+1)2+6=0$
$4k+4k+8=0$에서 $k=-1$
$k=-1$을 방정식에 대입하고 α를 구한다.
$-x^2-x+6=0,\ x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0,\ x=2,-3$
$\therefore k=-1,\ \alpha=-3$
$\therefore\ k+\alpha=-4$

6. 이차방정식 $x^2 - px + 2p + 1 = 0$이 중근을 갖도록 하는 실수 p의 값을 모두 곱하면?

① -8 ② -4 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$D = p^2 - 4(2p+1)$
$\quad = p^2 - 8p - 4 = 0$
판별식으로부터 나온 p에 대한 방정식의 근들이 주어진 식이 중근을 갖게 하므로
실수 p 값들의 곱은 근과 계수의 관계에서 -4이다.

7. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x+\frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5　② -2　③ 1　④ 3　⑤ 5

해설

$x+\frac{1}{x}=t$ 라 하고,
양변에 x 를 곱하면
$x^2+1=tx$
$x^2-tx+1=0$ 에서 x 는 실수이므로
$D=t^2-4\geq 0$ $\quad \therefore t^2\geq 4,\ t\leq -2$ 또는 $t\geq 2$

8. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$

m의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

9. $2x^2+4x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}\times(-2)=1$

10. 다음의 이차방정식에 대한 설명 중 <u>틀린</u> 것은? (단, a, b, c는 실수이다.)

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

② 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β, $D=b^2-4ac$라고 하면 $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{D}{a^2}$이다.

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ab<0$이다.

④ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면, $x^2+(a-2c)x+b-ac$도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$(단, $a\neq 0$)

해설

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ac<0$이다.

11. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$
④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

12. 이차함수 $y=-5x^2+20x+3$은 $x=a$일 때, 최솟값 b를 갖는다. $a+b$의 값은?

① 20 ② 22 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

해설

$y=-5x^2+20x+3$
$=-5(x^2-4x+4-4)+3$
$=-5(x-2)^2+23$
$\therefore a=2,\ b=23$
$\therefore a+b=2+23=25$

13. x의 범위가 $-3 \le x \le 2$ 일 때, 이차함수 $y = x^2 - 2x - 1$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

$y = x^2 - 2x - 1 = (x - 1)^2 - 2$

$\Rightarrow m : x = 1$ 일 때 : -2,

$M : x = -3$ 일 때 : 14

$\therefore m + M = 12$

14. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.

$y = x(18-x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$

$y = -(x-9)^2 + 81$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

15. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3 = 0$ 을 풀면?

① $x = \pm 1,\ \ x = 1 \pm \sqrt{2}i$ ② $x = \pm 2,\ \ x = 1 \pm \sqrt{3}i$

③ $x = \pm 1,\ \ x = 1 \pm \sqrt{3}i$ ④ $x = \pm 2,\ \ x = 1 \pm \sqrt{2}i$

⑤ $x = \pm 2,\ \ x = 3 \pm \sqrt{2}i$

해설

조립제법을 이용한다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -2 & 2 & 2 & -3 \\
 & & 1 & -1 & 1 & 3 \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & 3 & \boxed{0} \\
 & & -1 & 2 & -3 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow \ (x-1)(x+1)(x^2 - 2x + 3) = 0$

$\therefore x = \pm 1,\ \ x = 1 \pm \sqrt{2}i$

16. 복소수 $z=(1+i)x+1-2i$에 대하여 z^2이 음의 실수일 때, 실수 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=-1$

해설

$z = (1+i)x+1-2i = (x+1)+(x-2)i$

z^2의 음의실수 $\Leftrightarrow$ z가 순허수

$\therefore\ x+1=0,\quad x=-1$

17. 방정식 $(a^2-3)x-1=a(2x+1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

$\therefore a=3$ 이면 해가 없다.

18. $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(3-x)^2}=x+3$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 두 실근을 α, β라 할 때, $3\alpha\beta$의 값은?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 11

해설

(준식)$=|x-1|+|3-x|=x+3$

ⅰ) $x<1$

$-x+1+3-x=x+3$, $3x=1$

$\therefore x=\frac{1}{3}$

ⅱ) $1\le x<3$

$x-1+3-x=x+3$,

$x=-1$(해가 아니다)

ⅲ) $x\ge 3$

$x-1-3+x=x+3x=7$

두 근이 $\frac{1}{3}$, 7

$\therefore 3\alpha\beta=7$

19. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 + 3|x| - 4 = 0$$

① 0　② ± 1　③ $\pm\sqrt{2}$　④ $\pm\sqrt{3}$　⑤ ± 2

해설

(ⅰ) $x \geq 0$일 때 $|x| = x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 + 3x - 4 = 0, (x+4)(x-1) = 0$
$\therefore x = -4$ 또는 $x = 1$
이 때, $x \geq 0$이므로 $x = -4$는 부적합
$\therefore x = 1$
(ⅱ) $x < 0$일 때 $|x| = -x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 - 3x - 4 = 0, (x-4)(x+1) = 0$
$x = 4$ 또는 $x = -1$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -1$
$\therefore x = 1$ 또는 $x = -1$
이 때, $x < 0$이므로 $x = 4$는 부적합
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = \pm 1$

20. x에 대한 다음 방정식의 두 근의 곱은?

$$2\sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3} = 0$$

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　② -1　③ $-\frac{1}{2}$　④ 1　⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설

주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면
$(2x - \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 1) = 0$

$\therefore\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

21. 이차방정식 $x^2 - 14kx + 96k = 0$의 두 근의 비가 $3 : 4$일 때, 양수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 2$

해설

두 근을 $3\alpha,\ 4\alpha$라고 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$3\alpha + 4\alpha = 14k \cdots\cdots$ ㉠
$3\alpha \cdot 4\alpha = 96k \cdots\cdots$ ㉡
㉠에서 $7\alpha = 14k \quad \therefore \alpha = 2k \cdots\cdots$ ㉢
㉡에서 $12\alpha^2 = 96k \quad \therefore \alpha^2 = 8k \cdots\cdots$ ㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $4k^2 = 8k,\ 4k(k-2) = 0$
$\therefore k = 0$ 또는 $k = 2$
따라서 양수 k의 값은 $k = 2$이다.

22. 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근을 a, b라 할 때, a^2+b^2와 ab를 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2-8x+12=0$
② $x^2-7x+12=0$
③ $x^2+7x+12=0$
④ $x^2+5x+4=0$
⑤ $x^2-5x+4=0$

해설

$x^2-3x+4=0$의 두 근이 a, b라면
$a+b=3,\ ab=4$
$$\begin{cases} a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=9-8=1 \\ ab=4 \end{cases}$$
1, 4를 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2-5x+4=0$

23. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3\pm\sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\frac{c}{a}=-4\cdot7=-28,\ c=-28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\frac{b}{a}=(-3+\sqrt{2}i)+(-3-\sqrt{2}i)=-6,\ b=6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2+6ax-28a=0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

24. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2+px+q=0$ 의 한 근이 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = 2-\sqrt{3}$ 이므로,
두 근은 $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$
$p = -$(두근의 합) $= -4$
$q =$ (두근의 곱) $= 1$
$\therefore p+q = -3$

25. 둘레의 길이가 $40\,\mathrm{cm}$ 인 부채꼴의 넓이가 최대가 될 때, 반지름의 길이 및 최대 넓이 S 를 구하여라.

▶ 답 : ______ cm^2

▷ 정답 : $100\,\mathrm{cm}^2$

해설

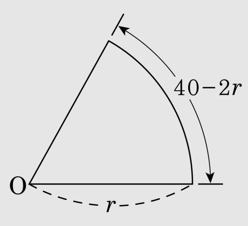
부채꼴의 반지름의 길이를 $r\mathrm{cm}$ 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times r \times (40 - 2r) = r(20 - r)$$

$$= -r^2 + 20r = -(r - 10)^2 + 100$$

한편 $r > 0$ 이고 $40 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 20$

따라서 $y = 10$ 일 때 최대 넓이는 $100\mathrm{m}^2$ 이다.



26. 지면으로부터 초속 20m 로 위로 던진 공의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 $y = -5x^2 + 20x$ 인 관계가 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 20 m

해설

$y = -5x^2 + 20x$ 에서 $y = -5(x-2)^2 + 20$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 20m 이다.

27. 방정식 $(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 의 모든 실근의 합은?

① -10　② -2　③ -1　④ 2　⑤ 10

해설

$(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 에서
$x^2+x=A$ 라 하면
$A^2+2A-8=0$,
$(A+4)(A-2)=0$
$\therefore\ A=-4$ 또는 $A=2$
(i) $x^2+x=-4$ 일 때,
$x^2+x+4=0$
$\therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$
(ii) $x^2+x=2$ 일 때,
$x^2+x-2=0$,
$(x+2)(x-1)=0$
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$
(i), (ii) 에서 실근은 $x=-2$ 또는 $x=1$ 이므로 실근의 합은
$-2+1=-1$

28. 다음 중 사차방정식 $x^4 + x^2 + 1 = 0$의 근에 해당하는 것을 모두 고르면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

④ $1+\sqrt{3}i$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$

해설

$x^4 + x^2 + 1 = 0$을 변형하면

$x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = 0$,

$(x^2+1)^2 - x^2 = 0$

$(x^2+1+x)(x^2+1-x) = 0$,

$x^2 + x + 1 = 0$ 또는 $x^2 - x + 1 = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x = \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

29. 삼차방정식 $x^3-8x^2+17x-10=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta\gamma$의 값은?

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}=-\frac{(-8)}{1}=8$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}=\frac{17}{1}=17$

$\alpha\beta\gamma=\frac{d}{a}=-\frac{(-10)}{1}=10$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(8)^2-2\cdot(17)=30$

$-2\alpha\beta\gamma=-2\cdot 10=-20$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta\gamma=10$

30. 사차방정식 $x^4+x^3-x-1=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^{100}+\dfrac{1}{\beta^{100}}$과 값이 같은 것은?

① $\alpha+1$ ② $\alpha-2$ ③ $\dfrac{2}{\beta}$ ④ -1 ⑤ 1

해설

$x^4+x^3-x-1=0$

$x^3(x+1)-(x+1)=0$

$(x+1)(x^3-1)=0$

$\rightarrow (x+1)(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x^2+x+1=0$의 두 근이 α,β

$\therefore \alpha^3=1, \beta^3=1,\ \alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1$

$$\alpha^{100}+\frac{1}{\beta^{100}}=(\alpha^3)^{33}\alpha+\frac{1}{(\beta^3)^{33}\beta}$$

$$=\alpha+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha\beta+1}{\beta}=\frac{2}{\beta}$$

31. 두 다항식 $f(x)=x^3-5, g(x)=x^3+3x+1$에 대하여 $f(x)=0$의 세 근을 α,β,γ라고 할 때, $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$의 값은?

① 350 ② 351 ③ 352 ④ 353 ⑤ 354

해설

$f(x)=0$의 세 근이 α,β,γ 라고 하면 $\alpha^3=5,\beta^3=5,\gamma^3=5$ 이다.
$g(\alpha)=\alpha^3+3\alpha+1=3\alpha+6$, $g(\beta)=\beta^3+3\beta+1=3\beta+6$, $g(\gamma)=\gamma^3+3\gamma+1=3\gamma+6$ $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$
$=(3\alpha+6)(3\beta+6)(3\gamma+6)=351$ ($\because \alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=5$)

32. 연립방정식 $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + 2xy + y^2 \quad = 1 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = x - 3$을 이차식에 대입하면
$x^2 + 2x(x-3) + (x-3)^2 = 1$
$x^2 - 3x + 2 = 0$
$\therefore \ x = 1, 2$
(i) $x = 1$일 때 $y = -2$
(ii) $x = 2$일 때 $y = -1$
따라서 $xy = -2$

33. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 를 만족하는 실수 해의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 1 개

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 & \cdots ㉠ \\ (x-y)^2 + y^2 = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x^2 - (y-3)^2 = 0$

$(x+y-3)(x-y+3) = 0$

$y = x+3$ 또는 $y = -x+3$

ⅰ) $y = -x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$\therefore\ x = 2$이 때, $y = 1$

ⅱ) $y = x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 + 2x + 4 = 0$

$\therefore\ x = -1 \pm \sqrt{3}i$

이 때, $y = 2 \pm \sqrt{3}i$

ⅰ), ⅱ)에서 실수해의 순서쌍은 $(2,\ 1)$이다.

따라서 실수해의 순서쌍의 개수는 1 개이다.

34. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2+3t-4=0$ 의 두 근이므로
$(t-1)(t+4)=0$ 에서
$t=1$ 또는 $t=-4$
따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

$\therefore\ 1+(-4)+(-4)+1=-6$

35. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x, y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=-x+2a$ 를 ②에 대입하면

$x(-x+2a)=a$

$\therefore -x^2+2ax=a$ 즉 $x^2-2ax+a=0$ 이 한 개의 실근을 가져야 하므로 $D/4=a^2-a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$a=1$

36. $z=\dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때, $1+z+z^2+\cdots+z^{2008}$ 의 값은?

① $-i$ ② -1 ③ 0 ④ i ⑤ 1

해설

$z=\dfrac{1+i}{1-i}=i, z^2=-1,\ z^3=-i,\ z^4=1$

(준식) : $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2008}$

처음 네 항의 합 :

$1+i-1-i=0$

$1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2008}$

$=0+0+\cdots+0+z^{2008}$

$=z^{2008}$

$=(z^4)^{502}$

$=1$

37. $a^2-3a+1=0$ 일 때, $a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$a^2-3a+1=0$ 에서

$a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}=a-1+\dfrac{3}{3a}=a+\dfrac{1}{a}-1$

한편, $a^2-3a+1=0$ 의 양변을 a 로 나누면

$a-3+\dfrac{1}{a}=0 \quad \therefore\ a+\dfrac{1}{a}=3$

$\therefore$(준식)$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-1=2$

38. $x=-3$ 일 때 최댓값 4 를 갖고, y 절편이 2 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$ 라 할 때, 상수 a,b,c 의 곱 abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{16}{27}$

해설

$y=a(x+3)^2+4$
$=a(x^2+6x+9)+4$
$=ax^2+6ax+9a+4$

$9a+4=2,\ 9a=-2$ 이므로 $a=-\frac{2}{9}$

$y=-\frac{2}{9}x^2-\frac{4}{3}x+2$

$\therefore abc=\left(-\frac{2}{9}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times 2=\frac{16}{27}$

39. 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값은?

① $-\frac{7}{8}$　② -1　③ $\frac{1}{8}$　④ 1　⑤ $-\frac{9}{8}$

해설

$y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1 = (x - 2k)^2 - 2k^2 + k - 1$

$m = -2k^2 + k - 1 = -2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8}$ 이므로 m 의 최댓값은 $-\frac{7}{8}$ 이다.

40. 두 함수 $f(x) = |x-2|-5$, $g(x) = x^2+6x+8$ 에 대하여 $0 \le x \le 5$ 에서 $y = g(f(x))$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 라고 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = |x-2|-5 = t$ 로 놓으면
$y = g(f(x)) = g(t) = t^2+6t+8 = (t+3)^2-1$
그런데 $0 \le x \le 5$ 에서 $-5 \le t \le -2$ 이므로
y 의 값은 $t=-5$ 일 때 최대이고 최댓값은 3,
$t=-3$ 일 때 최소이고 최솟값은 -1 이다.
$\therefore M = 3,\ m = -1$
$\therefore M+m = 2$

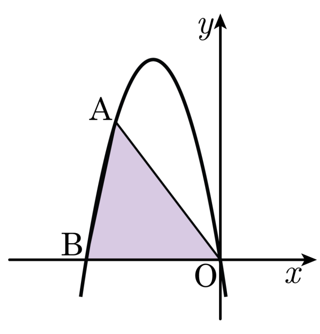
41. $yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 y 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면
$(y-1)x^2 + (y+1)x + y - 1 = 0$
(i) $y = 1$ 일 때, $2x = 0$
$\therefore x = 0$
(ii) $y \neq 1$ 일 때, 이 식을 x 에 대한 이차방정식으로 보면 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.
$D = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$
$3y^2 - 10y + 3 \leq 0$
$(3y-1)(y-3) \leq 0$
$\therefore \frac{1}{3} \leq y \leq 3$
따라서 (i), (ii)에 의하여 y 의 최댓값은 3 , 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이므로 최댓값과 최솟값의 곱은 $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ 이다.

42. 다음 그림은 축의 방정식이 $x=-3$ 인 이차함수 $y=-x^2+bx+c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle$OAB 의 넓이의 최댓값은?



① 18　　② 27　　③ 36　　④ 45　　⑤ 54

해설

축이 $x=-3$ 이므로 B 의 좌표는$(-6,\ 0)$ 이다.
따라서 $y=-x^2+bx+c$ 가 두 점
$(0,\ 0),\ (-6,\ 0)$ 을 지나므로,
$0=c,\ 0=-36-6b$
$b=-6,\ c=0$
$y=-x^2-6x=-(x+3)^2+9$
$\triangle$OAB 에서 밑변의 길이를 $\overline{\mathrm{OB}}$ 라고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle$OAB 의 넓이가 최대가 된다.
즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 9)$ 이므로
$\triangle$OAB 의 넓이$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times 9=\frac{1}{2}\times 6\times 9=27$

43. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+2x^3+ax^2+bx+15=0$의 한 근이 $1+2i$일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4　② -3　③ 0　④ 3　⑤ 4

해설

두 허근은 $1+2i$, $1-2i$ 나머지 두 실근을 α, β라 하면
네 근의 합 : $(1+2i)+(1-2i)+\alpha+\beta=-2$
$\therefore$ 두 실근의 합 : $\alpha+\beta=-4$

44. 다음 방정식을 만족하는 양의 정수 x, y의 값이 아닌 것은?

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=1$$

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=1$ 의 양변에 xy 를 곱하면

$2y+3x=xy$, $xy-3x-2y=0$

$\therefore\ (x-2)(y-3)=6$

이 때, x, y 는 양의 정수이므로

$x-2\geq -1$, $y-3\geq -2$ 인 정수이다.

따라서, $x-1$, $y-3$ 의 값은 다음 표와 같다.

$x-2$	1	2	3	6
$y-3$	6	3	2	1

그러므로 구하는 x, y 의 값은 $\begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases}$

45. $x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$의 두 근이 정수가 되도록 정수 m의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$의 두 근을 α, β라면

$\alpha + \beta = 1 - m \cdots$㉠, $\alpha\beta = m + 1 \cdots$㉡

㉠ + ㉡을 하면 $\alpha\beta + \alpha + \beta = 2$ (α, β는 정수)

$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 3$

$\therefore \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -4 \end{cases}$ 를 ㉡에 대입하면

$m = -1,\ 7$

46. 서로 다른 두 복소수 x, y 가 $x^2 - y = i,\ y^2 - x = i$ 를 만족할 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $2 - 3i$

해설

$x^2 - y = i \cdots ①,\ y^2 - x = i \cdots ②$ 에서

① - ② 하면 : $(x + y)(x - y) + (x - y) = 0,$

$(x - y)(x + y + 1) = 0$

조건에서 $x \neq y$ 이므로 $x + y = -1$ 이다.

① + ②하면 $x^2 + y^2 - x - y = 2i$

식을 변형하면 $(x + y)^2 - 2xy - (x + y) = 2i$

$\therefore\ xy = 1 - i$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\ &= (-1)^3 - 3(1 - i)(-1) \\ &= 2 - 3i \end{aligned}$$

47.

두 복소수 α, β 를 $\alpha = (3+4i)^{10} + (3-4i)^{10}$, $\beta = (3+4i)^{10} - (3-4i)^{10}$ 이라 할 때,α 는 (가) 이고, β 는(도) (나) 이다.

다음 중 (가), (나) 에 알맞은 것을 차례로 적으면?

① 양의 실수, 음의 실수
② 음의 실수, 양의 실수
③ 실수, 순허수
④ 순허수, 실수
⑤ 순허수, 순허수

해설

$\alpha = (3+4i)^{10} + (3-4i)^{10}$ 을 직접 계산하기는 어렵다.
따라서 $\overline{\alpha}$ 를 구하여 α 와 $\overline{\alpha}$ 의 관계를 살펴본다.

$$\begin{aligned}\overline{\alpha} &= \overline{(3+4i)^{10} + (3-4i)^{10}} \\ &= (\overline{3+4i})^{10} + (\overline{3-4i})^{10} \quad \Leftarrow \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ &= (3-4i)^{10} + (3+4i)^{10} \quad \Leftarrow \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \\ &= \alpha\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\alpha} = \alpha$ 이므로 α 는 실수이다.

$$\begin{aligned}\overline{\beta} &= \overline{(3+4i)^{10} - (3-4i)^{10}} \\ &= (\overline{3+4i})^{10} - (\overline{3-4i})^{10} \quad \Leftarrow \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \\ &= (3-4i)^{10} - (3+4i)^{10} \quad \Leftarrow \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \\ &= -\beta\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\beta} = -\beta$ 이므로 β 는 순허수이다.

48. 삼차방정식 $x^3 + (1-2a)x^2 + (a^2 - a + 1)x - a = 0$이 단 한 개의 실근을 갖게 하는 실수 a의 값의 범위는? (단, 중근은 한 개의 해로 한다.)

① $-3 \le a < 1$　　② $-3 < a \le 1$　　③ $-1 \le a < 3$

④ $-1 < a \le 3$　　⑤ $-2 \le a < 1$

해설

$f(x) = x^3 + (1-2a)x^2 + (a^2 - a + 1)x - a$라 하면 $f(a) = 0$이므로

$f(x) = (x-a)\left\{x^2 - (a-1)x + 1\right\}$

ⅰ) $x = a$가 삼중근일 때

$a^2 - (a-1)a + 1 = 0$에서 $a = -1$ 여기서, $a = -1$일 때 $x = -1$ (삼중근)

ⅱ) $x^2 - (a-1)x + 1 = 0$이 허근을 가질 때

$\mathrm{D} = (a-1)^2 - 4 < 0 \quad \therefore \ -1 < a < 3$

ⅰ), ⅱ)에서 $-1 \le a < 3$

49. x에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2+m^2x+n^2-2m=0$, $x^2-2mx+n^2+m^2=0$이 오직 하나의 공통근을 가지고, m, n이 실수일 때, $m+n$의 값은? (단, 중근인 경우에는 두 개의 실근으로 본다.)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 방정식의 공통근을 α라 하면

$\alpha^2+m^2\alpha+n^2-2m=0 \cdots$ ①

$\alpha^2-2m\alpha+m^2+n^2=0 \cdots$ ②

① − ② 하면

$(m^2+2m)\alpha-(m^2+2m)=0$

$\therefore\ (m^2+2m)(\alpha-1)=0$

$\therefore\ m^2+2m=0$ 또는 $\alpha-1=0$

그런데 $m^2+2m=0$일 때,

곧, $m^2=-2m$일 때에는 두 방정식이 일치하게 되므로 오직 하나의 공통근을 가진다는 문제의 뜻에 어긋난다.

$\therefore\ \alpha=1$

이것을 ①에 대입하면

$1+m^2+n^2-2m=0 \quad \therefore\ (m-1)^2+n^2=0$

문제의 조건으로부터 m, n은 실수이므로

$m-1=0$, $n=0$

$\therefore\ m=1,\ n=0 \quad \therefore\ m+n=1$

50. 같은 반원에 평행인 현 C_1, C_2, C_3 가 있다. 길이가 각각 20, 16, 8 이고, C_1 과 C_2 의 거리와 C_2 와 C_3 의 거리가 같을 때, 이 원의 반지름은?

① 12

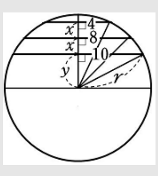
② $4\sqrt{7}$

③ $\dfrac{5\sqrt{65}}{3}$

④ $\dfrac{5\sqrt{22}}{2}$

⑤ 주어진 조건만으로는 알 수 없다.

해설



그림과 같이 3 개의 직각삼각형에서

$r^2 = y^2 + 10^2 \cdots\cdots$ ①

$r^2 = (x+y)^2 + 8^2 \cdots\cdots$ ②

$r^2 = (2x+y)^2 + 4^2 \cdots\cdots$ ③

② − ① : $0 = 2xy + x^2 - 36 \cdots\cdots$ ④

③ − ② : $0 = 2xy + 3x^2 - 48 \cdots\cdots$ ⑤

⑤ − ④ : $0 = 2x^2 - 12 \quad \therefore x = \sqrt{6}$

이것을 ④ 또는 ⑤에 대입하면 $y = \dfrac{15}{\sqrt{6}}$

$\therefore \quad r = \sqrt{y^2 + 10^2} = \dfrac{5\sqrt{22}}{2}$