1. $(6x^3 - x^2 - 5x + 5) \div (2x - 1)$ 의 몫을 a, 나머지를 b라 할 때, $a + b$를 구하면?

① $3x^2 + x + 1$ ② $x^2 + x + 1$ ③ $3x^2 + 1$
④ $x^2 + x - 1$ ⑤ $3x^2 + x$

해설

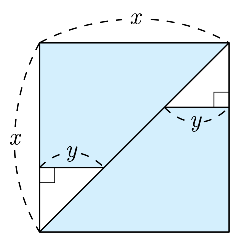
나눗셈을 이용하면 $a = 3x^2 + x - 2$, $b = 3$
$\therefore\ a + b = 3x^2 + x + 1$

해설

조립제법을 이용할 수 있다.
이 때, $2x - 1$로 나눈 몫은 $x - \frac{1}{2}$로 나눈 몫의 $\frac{1}{2}$이고 나머지는 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right) Q(x) + R \\ &= (2x - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot Q(x) + R \end{aligned}$$

2. 다음 그림은 한변의 길이가 x인 정사각형을 대각선을 따라 자른 후 직각이등변삼각형 2개를 떼어낸 도형이다. 이때, 색칠한 부분의 넓이를 x, y에 관한 식으로 나타내어라.



① $xy - y^2$　② $x^2 - y^2$　③ $x^2 - y$　④ $\frac{xy - y^2}{2}$　⑤ $\frac{x - y}{2}$

해설

$$x^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times y \times y = x^2 - y^2$$

3. $(2x^3-3x^2+3x+4)(3x^4+2x^3-2x^2-7x+8)$을 전개한 식에서 x^3의 계수는?

① 31　② 33　③ 35　④ 37　⑤ 39

해설

$2x^3\times 8-3x^2\times(-7x)+3x\times(-2x^2)+4\times 2x^3=39x^3$

4. $\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ 가 $x \neq 1$ 인 모두 실수 x 에 대해 항상 성립 하도록 $a,\ b,\ c$ 를 구할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 2　　② -2　　③ 1　　④ -1　　⑤ 0

해설

우변의 분모를 통분하면

$\frac{a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)}{x^3-1}$

$= \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$

$\therefore\ \frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$

분자의 계수를 비교하면

$a+b=0,\ a-b+c=2,\ a-c=1$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1,\ c=0$

$\therefore a+b+c=0$

5. x에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함) 의 합은?

① 0　② 16　③ 32　④ 64　⑤ 1024

해설

$(4x^2-3x+1)^5$을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(4x^2-3x+1)^5 = a_0x^{10}+a_1x^9+a_2x^8+\cdots+a_9x+a_{10}$과 같이 된다.
여기서 모든 계수들의 합
$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$을 구하려면
$x=1$을 대입하면 된다.
즉, $(4-3+1)^5 = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$
모든 계수들의 합은 $2^5=32$

6. 다항식 x^4-3x^2+ax+7을 $x+2$로 나누면 나머지가 5이다. 이 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=x^4-3x^2+ax+7$
$f(x)=(x+2)Q(x)+5$
$\therefore\ f(-2)=5$
$f(-2)=16-12-2a+7=5$
$\therefore\ a=3$

7. 다항식 x^4-3x^2+ax+5를 $x+2$로 나누면 나머지가 3이다. a의 값은?

① 0 ② 2 ③ 3 ④ -2 ⑤ -3

해설

$x^4-3x^2+ax+5=f(x)$라 놓자.
$f(-2)=3$에서 $-2a+9=3$
$\therefore\ a=3$

8. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx - 1$ 이 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ 로 놓으면
$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$, $x-2$ 로 나누어 떨어진다.
$f(1) = 1 + a + b - 1 = 0$ 즉, $a + b = 0 \cdots$ ㉠
$f(2) = 8 + 4a + 2b - 1 = 0$ 즉, $4a + 2b = -7 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡으로부터 $a = -\frac{7}{2}$, $b = \frac{7}{2}$
$\therefore a + b = 0$

9. 다항식 $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$가 $x - 2$로 나누어 떨어지고 또, $x - 3$으로도 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지려면

$f(2) = 24 + 4a + 2b + 12 = 0$

$\therefore\ 4a + 2b + 36 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또, $f(x)$ 가 $x - 3$ 으로 나누어 떨어지려면

$f(3) = 81 + 9a + 3b + 12 = 0$

$\therefore\ 9a + 3b + 93 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -13,\ b = 8$

10. 다항식 $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + k$가 일차식 $x - 1$을 인수로 가질 때, 이 다항식 $f(x)$를 인수분해 하면?

① $(x-2)(x-1)(x+1)$
② $(x-1)x(x+2)$
③ $(x+1)(x-1)(x+2)$
④ $(x-2)(x-1)(x+2)$
⑤ $(x-2)(x+1)(x+2)$

해설

$f(x) = (x-1)Q(x) \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0$

$\therefore\ f(1) = 2 + k = 0, \qquad \therefore\ k = -2$

즉, $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$\qquad\quad = (x-1)(x+1)(x+2)$

11. 다음 중 다항식 $x^4 - 5x^2 + 4$를 인수분해 할 때, 나타나는 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x-1$ ② $x-2$ ③ $x-3$ ④ $x+1$ ⑤ $x+2$

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= (x^2-1)(x^2-4) \\ &= (x+1)(x-1)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

12. x에 대한 다항식 x^3-2x^2-x+2가 $(x+a)(x+b)(x+c)$로 인수분해될 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, a, b, c는 상수)

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-1)(x-2)$

$a^2+b^2+c^2=(-1)^2+1^2+2^2=6$

13. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2000

해설

$a=1999$라 하면

$1998\times1999+1=(a-1)a+1=a^2-a+1$

$$\therefore \frac{1999^3+1}{1998\times1999+1}=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$

$$=a+1=2000$$

14. 자연수 $N = p^n q^m r^l$ 로 소인수분해될 때, 양의 약수의 개수는 $(n+1)(m+1)(l+1)$ 이다. 이 때, $38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 9 개 ② 12 개 ③ 16 개 ④ 24 개 ⑤ 32 개

해설

$38 = x$ 라 하면,

$$\begin{aligned} 38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= (x+1)^3 \\ &= 39^3 \\ &= 13^3 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

$\therefore \quad (3+1)(3+1) = 16$

15. 두 다항식 $2x^2 + 2x - 4$와 $4x^3 - 4$에 관한 설명이다. 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① 두 다항식은 $(x-1)$로 나누어 떨어지므로, $(x-1)$은 두 다항식의 공약수이다.

② 두 다항식은 공약수가 있으므로 서로소가 아니다.

③ $4(x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)$은 두 다항식의 공배수이다.

④ 두 다항식의 최대공약수는 $2(x-1)$이다.

⑤ 두 다항식의 최소공배수는 $(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)$이다.

해설

$2x^2 + 2x - 4 = 2(x-1)(x+2)$
$4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2+x+1)$
최대공약수 : $2(x-1)$
최소공배수 : $4(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$

16. 두 다항식 $A,\ B$ 에 대하여 $A+B=-x^3-2x^2+4x+5$, $2A-B=4x^3-x^2-x+1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A=x^3+x^2+x+2,\ B=-2x^3-3x^2+3x+3$

② $A=x^3-x^2+x+2,\ B=-2x^3-x^2+3x+3$

③ $A=x^3-x^2+x-2,\ B=-2x^3-x^2+3x+7$

④ $A=x^3-x^2-x+2,\ B=-2x^3-x^2+5x+3$

⑤ $A=3x^3-3x^2+3x+6,\ B=-4x^3+x^2+x-1$

해설

$A+B=-x^3-2x^2+4x+5\cdots$㉠

$2A-B=4x^3-x^2-x+1\cdots$㉡

(㉠ + ㉡) $\div 3$: $A=x^3-x^2+x+2$

(2㉠ − ㉡) $\div 3$: $B=-2x^3-x^2+3x+3$

17. 다항식 $2x^2+5ax-a^2$ 을 다항식 $P(x)$ 로 나눈 몫이 $x+3a$, 나머지가 $2a^2$ 일 때, 다항식 $(x+a)P(x)$ 를 나타낸 것은?

① $x^2+2ax-2a^2$　　② x^2-a^2

③ $2x^2+3ax+a^2$　　④ $2x^2-3ax-a^2$

⑤ $2x^2+ax-a^2$

해설

$2x^2+5ax-a^2=P(x)(x+3a)+2a^2$ 이므로
$P(x)(x+3a)=2x^2+5ax-3a^2$
따라서, 다항식 $P(x)$ 는 $2x^2+5ax-3a^2$ 을 $x+3a$ 로 나눈 몫이므로
$P(x)=2x-a$

$$\begin{aligned}\therefore\ (x+a)P(x)&=(x+a)(2x-a)\\&=2x^2+ax-a^2\end{aligned}$$

18. 다항식 $f(x) = 4x^3 + ax^2 + x + 1$을 $x + \frac{1}{2}$로 나누면 나머지가 1일 때, 다항식 $f(x)$를 $2x + 1$로 나눈 몫 $Q(x)$와 나머지 R을 구하면?

① $Q(x) = 2x^2 - x,\ R = 1$
② $Q(x) = 2x^2 + x,\ R = 1$
③ $Q(x) = 2x^2 - 2x,\ R = 1$
④ $Q(x) = 4x^2 - 2x,\ R = \frac{1}{2}$
⑤ $Q(x) = 4x^2 + 2x,\ R = \frac{1}{2}$

해설

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 = \frac{a}{4} \therefore a = 4$

따라서 $f(x) = 4x^3 + 4x^2 + x + 1$
$= x(4x^2 + 4x + 1) + 1$
$= x(2x + 1)^2 + 1$

$2x + 1$로 나누면 $Q(x) = 2x^2 + x,\ R = 1$

19. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$ 의 전개식으로 옳은 것은?

① a^3+b^3 ② a^6+b^6 ③ a^6-b^6
④ a^9+b^9 ⑤ a^9-b^9

해설

(준 식)$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6$

20. $(1+2x-3x^2+4x^3-5x^4+6x^5+7x^6)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는?

① 0　② 2　③ -2　④ 4　⑤ -4

해설

x^3 을 만들 수 있는 것은
(3차항)×(상수항), (2차항) ×(1차항)
2쌍씩이다.
$4\times1\times2+(-3)\times2\times2 \ = 8+(-12)=-4$

21. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겉넓이는 52이고, 모서리의 길이의 합은 36이다. 이 상자의 대각선의 길이는?

① 5　② $\sqrt{29}$　③ $\sqrt{33}$　④ 6　⑤ $\sqrt{42}$

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c라 하면

$2(ab+bc+ca)=52$

$4(a+b+c)=36 \ \rightarrow \ a+b+c=9$

(직육면체 대각선의 길이)

$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\sqrt{(a+b+c+)^2-2(ab+bc+ca)}$

$=\sqrt{81-52}=\sqrt{29}$

22. $16a^4 - 250ab^3$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① a　　② $2a-5b$

③ $2a(2a-5b)$　　④ $4a^2+10ab+25b^2$

⑤ $2a(2a+5b)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 2a(8a^3-125b^3)\\ &= 2a\{(2a)^3-(5b)^3\}\\ &= 2a(2a-5b)(4a^2+10ab+25b^2)\end{aligned}$$

23. $(x^2+x)(x^2+x-8)+12$를 인수분해 할 때, 다음 중 인수가 될 수 없는 것은?

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $x-2$ ④ $x+2$ ⑤ $x+3$

해설

$x^2+x=A$로 놓으면 주어진 식은

$A(A-8)+12=A^2-8A+12$

$=(A-2)(A-6)$

$\therefore$(준식) $=(x^2+x-2)(x^2+x-6)$

$=(x-1)(x+2)(x-2)(x+3)$

24. 다음 식$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-3$을 인수분해하면?

① $(x^2-x+7)(x^2-5x+3)$

② $(x^2-5x+7)(x^2-x+3)$

③ $(x^2-5x+6)(x^2-5x+3)$

④ $(x^2-5x+7)(x^2-5x+3)$

⑤ $(x^2-2x+7)(x^2-5x+3)$

해설

$$
\begin{aligned}
&(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-3 \\
&=\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}-3 \\
&=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-3 \\
&=(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24-3 \\
&=(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+21 \\
&=(x^2-5x+7)(x^2-5x+3)
\end{aligned}
$$

25. 다항식 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$를 인수분해 한 식은?

① $(2x - y - 2)(x + y - 1)$ ② $(2x + y + 2)(x - y + 1)$

③ $(2x - y - 2)(x - y - 1)$ ④ $(2x + y - 2)(x + y - 1)$

⑤ $(2x + y - 2)(x - y - 1)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= 2x^2 - (y+4)x - (y^2 - y - 2)\\ &= 2x^2 - (y+4)x - (y+1)(y-2)\\ &= \{2x + (y-2)\}\{x - (y+1)\}\\ &= (2x + y - 2)(x - y - 1)\end{aligned}$$

26. 삼각형 ABC의 세변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$인 관계가 성립할 때 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① $b = c$인 이등변 삼각형

② $a = c$인 이등변삼각형

③ b가 빗변의 길이인 직각삼각형

④ 정삼각형

⑤ c가 빗변의 길이인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^2(a+b) + b^2(a+b) - c^2(a+b) \\ &= (a+b)\left(a^2+b^2-c^2\right) = 0\end{aligned}$$

$a^2 + b^2 = c^2$ $(\because\ a + b \neq 0)$

$\therefore$ c가 빗변의 길이인 직각삼각형

27. $a+b+c=4$, $ab+bc+ca=3$, $abc=1$일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하면?

① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
위 식에 따라 $a^2+b^2+c^2+6=16$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2=10$
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=4\times(10-3)+3\times1$
$=31$

28. 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라. (a, b, c, d는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2 \\ &= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a + b + c + d = 4$

29. 이차항의 계수가 1인 두 이차 다항식의 최대공약수가 $x+3$이고, 최소공배수가 x^3+4x^2+x-6일 때 두 이차식을 구하면?

① $\begin{cases} x^2+x-3 \\ x^2+5x+1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x^2+x-6 \\ x^2+4x+3 \end{cases}$

③ $\begin{cases} x^2+x-2 \\ x^2-x+3 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} x^2+2x-3 \\ x^2+5x+6 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} x^2+4x+3 \\ x^2-x-6 \end{cases}$

해설

$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x+2)(x+3)$
두 이차식은 $(x-1)(x+3),\ (x+2)(x+3)$에서
$x^2+2x-3,\ x^2+5x+6$

30. 두 다항식의 최대공약수는 $2x-1$ 이고 두 다항식의 곱은 $4x^3+4x^2-7x+2$ 이다. 이 두 다항식의 합을 $g(x)$ 라면 $g(1)$ 의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$4x^3+4x^2-7x+2$

$(x-\frac{1}{2})(4x^2+6x-4)$

$=(x-\frac{1}{2})\cdot 2\cdot(2x^2+3x-2)(2x-1)(2x-1)(x+2)$

두 다항식의 곱이 $(2x-1)^2(x+2)$ 이고

최대공약수가 $(2x-1)$ 이므로

두 다항식은 $(2x-1), (2x-1)(x+2)$

$g(x)=(2x-1)+(2x-1)(x+2)$

$g(1)=1+3\cdot 1=4$

31. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x-3$이고, 최소공배수가 x^3-2x^2-3x일 때, 두 이차다항식의 합을 구하면?

① $2x^2-5x$　② $2x^2-x-3$　③ $2x^2+x+3$
④ $2x^2-5x-3$　⑤ $2x^2+5x+3$

해설

두 식 A, B의 최대공약수가 $x-3$이고 최소공배수가 $x(x-3)(x+1)$이다.
따라서 이차항의 계수가 1인 두 다항식은
각각 $x(x-3)$, $(x-3)(x+1)$ 이다.
$\therefore$ 두 다항식의 합 $=2x^2-5x-3$

32. $x+y+z=4$, $xy+yz+zx=1$, $xyz=2$일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$의 값을 구하면?

① 16　② 8　③ 4　④ 2　⑤ 1

해설

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$을

$xy+yz+zx=1$을 이용하여 변형하면

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$

$=(1-zx)(1-xy)(1-yz)$

$=1-(xy+yz+zx)+(x^2yz+xy^2z+xyz^2)-(xyz)^2$

$=1-(xy+yz+zx)+xyz(x+y+z)-(xyz)^2$

$=1-1+2\cdot4-4$

$=4$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$(x-a)(x-b)(x-c)$

$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

33. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle\mathrm{ABC}$에 대하여 $a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$인 관계가 성립할 때, $\triangle\mathrm{ABC}$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$에서 $a^2-ab+b^2=ac+bc-c^2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, $\triangle\mathrm{ABC}$는 정삼각형이다.

34. $a+b+c=7$, $a^2+b^2+c^2=21$, $abc=8$일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값은?

① 26　② 48　③ 84　④ 96　⑤ 112

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^c+2(ab+bc+ca)$

$49=21+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=14$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

$=(14)^2-2(8\times 7)$

$=84$

35. 어떤 일차식 $g(x)$에 대하여
$x^4+2x^3-3x^2-g(x)=\left\{(x-\alpha)(x-\beta)\right\}^2$가 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{우변}) &= \{(x-\alpha)(x-\beta)\}^2 \\
&= \left\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right\}^2 \\
&= x^4-2(\alpha+\beta)x^3 \\
&\quad +\left\{(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta\right\}x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2 \\
&= x^4+2x^3-3x^2-g(x)
\end{aligned}
$$

$g(x)$가 일차식이므로 양변의 계수를 비교하면

$-2(\alpha+\beta)=2,\ (\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=-3$

$\therefore\ \alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-2$

36. 1985년부터 1995년까지 5년 간격으로 조사한 우리나라의 농가인구 비율 P는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

연도	85	90	95
인구비율(%)	20.9	15.5	10.8
인구(1000명)	8521	6661	4851

$P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$
이 때, $t = 0$은 1985년을 나타낸다. 이 식을 $t = 0$이 1990년을 나타내도록 변형하면?

① $P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

② $P = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$

③ $P = 0.35(t-1)^2 - 5.75(t-1) + 20.9$

④ $P = 0.35(t+2)^2 - 5.75(t+2) + 20.9$

⑤ $P = 0.35(t-2)^2 - 5.75(t-2) + 20.9$

해설

$P_1(t) = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$일 때,
$t = 0 \rightarrow 1985$년, $t = 1 \rightarrow 1990$년, $t = 2 \rightarrow 1995$년
$P_2(t) = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$이면,
$P_2(0) = P_1(1)$이므로 $P_2(t)$에서
$t = 0 \rightarrow 1990$년임을 알 수 있다.

37. x에 대한 항등식 $(x^2 - x - 1)^3 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_6 x^6$에서 $a_1 + a_3 + a_5$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면,
$-1 = a_0 + a_1 + \ \cdots \ + a_6 \quad \cdots$㉠
양변에 $x = -1$을 대입하면,
$1 = a_0 - a_1 + \ \cdots \ + a_6 \quad \cdots$㉡
㉠ − ㉡: $-2 = 2(a_1 + a_3 + a_5)$
$\therefore\ a_1 + a_3 + a_5 = -1$

38. 다항식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때의 나머지가 3이고, x^2-4x+3으로 나눌 때의 나머지가 $3x$일 때, $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지는?

① 3　　② $3x+3$　　③ $3x-3$

④ $6x-9$　　⑤ $9x+6$

해설

$f(x)=(x-2)(x-1)Q(x)+3$

$f(x)=(x-3)(x-1)Q'(x)+3x$

$\therefore\ f(2)=3,\ f(3)=9$ $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x)=(x-2)(x-3)Q''(x)+ax+b$

$f(2)=2a+b=3,\ f(3)=3a+b=9$

$a=6,\ b=-9$

$\therefore$ 나머지는 $6x-9$

39. $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$을 바르게 인수분해 한 것을 찾으면?

① $(x^2+1)(x+3)(x+1)$
② $(x^2+1)(x+3)(x-1)$
③ $(x^2+1)(x-3)(x-1)$
④ $(x^2-3)(x-1)(x+1)$
⑤ $(x^2+3)(x-1)(x+1)$

해설

$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$
$= (x^4 - 2x^2 - 3) + 2x^3 + 2x$
$= (x^2-3)(x^2+1) + 2x(x^2+1)$
$= (x^2+1)(x^2+2x-3)$
$= (x^2+1)(x+3)(x-1)$

40. x^4+3x^2+4를 바르게 인수분해한 것은?

① $(x^2+x+1)(x^2-2x+1)$ ② $(x^2+2x+2)(x^2-x+2)$
③ $(x^2-x+2)(x^2+x+2)$ ④ $(x^2+x-1)(x^2-2x+1)$
⑤ $(x^2+x-2)(x^2+x+2)$

해설

$$\begin{aligned} x^4+3x^2+4 &= (x^4+4x^2+4)-x^2 \\ &= (x^2+2)^2-x^2 \\ &= (x^2+x+2)(x^2-x+2) \end{aligned}$$

41. 두 다항식 x^3+px^2+qx+1과 x^3+qx^2+px+1의 최대공약수가 x에 대한 일차식일 때, 상수 $p,\ q$에 대하여 $p+q$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$A=x^3+px^2+qx+1,\ B=x^3+qx^2+px+1$이라고 하면

$$\begin{aligned} A-B &= (x^3+px^2+qx+1)-(x^3+qx^2+px+1) \\ &= (p-q)x^2-(p-q)x \\ &= (p-q)x(x-1) \end{aligned}$$

이 때, $A-B$는 두 다항식 $A,\ B$의 최대공약수를 인수로 갖는다. 그런데, $p=q$이면 $A=B$가 되어 최대공약수가 x에 대한 삼차식이 되므로 최대공약수가 x에 대한 일차식이라는 조건에 모순이다.

또한, 두 다항식 $A,\ B$의 상수항이 모두 1이므로 x를 인수로 가질 수 없다.

따라서, $x-1$이 두 다항식 $A,\ B$의 최대공약수이고, 최대공약수는 $A,\ B$의 인수이므로 $x=1$을 두 다항식에 각각 대입하면 그 값이 0이어야 한다.

$1+p+q+1=0,\ 1+q+p+1=0$

$\therefore\ p+q=-2$

42. 임의의 자연수 k에 대하여 $x-k$로 나눈 나머지가 k인 다항식 $f(x)$의 개수를 구하면?

① 0개 ② 1개 ③ 2개

④ 3개 ⑤ 무수히 많다.

해설

나머지 정리에 의하여 임의의 자연수 k에 대하여 $\therefore\ f(k)=k$
따라서 $g(x)=f(x)-x$로 두면 모든 자연수에 대해서 $g(x)=0$이 성립
$\therefore\ g(x)=0$
즉, $f(x)=x$
$\therefore$ 1개

43. 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $Q_1(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 한다. 이와 같은 과정을 계속할 때, $Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_{n+1}(x)$라 한다. $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(\alpha)$의 값은?

① 0　　② α　　③ $f(\alpha)$

④ $Q_n(\alpha)$　　⑤ $Q_{n+1}(\alpha)$

해설

$f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
나머지를 R_1이라 하면
$f(x) = (x-\alpha)Q_1(x) + R_1$에서
$Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지를 R_{n+1}이라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)\{(x-\alpha)Q_2(x) + R_2\} + R_1 \\ &= (x-\alpha)^2Q_2(x) + (x-\alpha)R_2 + R_1 \\ &= (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)Q_3(x) + R_3\} + (x-\alpha)R_2 + R_1 \\ &= (x-\alpha)^3Q_3(x) + (x-\alpha)^2R_3 + (x-\alpha)R_2 + R_1 \\ &\ \ \vdots \\ &= (x-\alpha)^nQ_n(x) + (x-\alpha)^{n-1}R_n + \\ &\qquad \cdots\cdots + (x-\alpha)R_2 + R_1 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를
$R(x)$라 하면
$R(x) = (x-\alpha)^{n-1}R_n + \cdots + (x-\alpha)R_2 + R_1$
$\therefore\ R(\alpha) = R_1 = f(\alpha)$

44. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -2이다. 다항식 $xf(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나눈 몫과 나머지를 차례로 적은 것은?

① $2xQ(x)-2,\ -1$
② $2xQ(x)-1,\ -1$
③ $\frac{1}{2}xQ(x)-2,\ 1$
④ $\frac{1}{2}xQ(x)-1,\ 1$
⑤ $\frac{1}{2}xQ(x)+1,\ 2$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-1)Q(x)-2 \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)2Q(x)-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xf(x) &= \left(x-\frac{1}{2}\right)2xQ(x)-2x \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)2xQ(x)-2\left(x-\frac{1}{2}\right)-1 \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\{2xQ(x)-2\}-1 \end{aligned}$$

45. 다항식 $f(x)$는 다항식 $g(x)$로 나누어떨어진다. $f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하고, $Q(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫과 나머지를 각각 $h(x), r(x)$라고 할 때, $f(x)$를 $\{g(x)\}^2$으로 나눈 몫과 나머지는?

① 몫 $Q(x)$, 나머지 $r(x)$

② 몫 $h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

③ 몫 $Q(x)h(x)$, 나머지 $h(x)r(x)$

④ 몫 $h(x)$, 나머지 $r(x)$

⑤ 몫 $g(x)h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

해설

$f(x) = g(x)Q(x) \cdots$ ㉠
$Q(x) = g(x)h(x) + r(x) \cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$f(x) = \{g(x)\}^2 h(x) + g(x)r(x)$

$r(x)$가 $g(x)$보다 낮은 차수이므로 $g(x)r(x)$는 $\{g(x)\}^2$보다 낮은 차수이다.
따라서, 나머지는 $g(x)r(x)$이고 몫은 $h(x)$이다.

46. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

① -8　　② -4　　③ 0　　④ 4　　⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.

i) $x=3 \Rightarrow e=1$

ii) $x=2 \Rightarrow a-b+c-d+1=0$

iii) $x=4 \Rightarrow a+b+c+d+1=16$

iv) $x=4 \Rightarrow 16a-8b+4c-2d+1=1$

v) $x=5 \Rightarrow 16a+8b+4c-2d+1=1$

위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.

$a=1,\ b=4,\ c=6,\ d=4,\ e=1$

$\therefore 2c-bd=-4$

해설

$x-2=t$ 라 하면 $x-3=t-1$

(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$

다음처럼 조립제법으로 $t-1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

1	1	0	0	0	0	
		1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	$=e$
		1	2	3		
1	1	2	3	4		$=d$
		1	3			
1	1	3	6			$=c$
		1				
	$a=$ 1	4				$=b$

$\therefore 2c-bd=-4$