

1. 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 일차함수 $f(x) = ax + b$ 의 정의역과 치역이 일치할 때, 두 실수 a 와 b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

- 1) $a > 0$ 일 때 $f(-1) = -1$, $f(3) = 3$ 을 만족
 $-a + b = -1$, $3a + b = 3$
따라서 $a = 1$, $b = 0$
- 2) $a < 0$ 일 때 $f(-1) = 3$, $f(3) = -1$
 $-a + b = 3$, $3a + b = -1$
따라서 $a = -1$, $b = 2$
- 1), 2)에서 $a > 0$ 일 때 $a + b = 1 + 0 = 1$
 $a < 0$ 일 때 $a + b = -1 + 2 = 1$
즉 $a + b = 1$

2. $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid -2 \leq y \leq 2\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b (a > 0)$ 로 정의되는 함수 f 가 일대일대응일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

- ① -2 ② 2 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ -1

해설

일대일 대응이고 $a > 0$ 이므로

$$f(-1) = -2 \quad f(2) = 2$$

$$\therefore -a + b = -2, \quad 2a + b = 2$$

$$\Rightarrow a = \frac{4}{3} \quad b = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = -2$$

3. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 f 는 X 에서 X 로의 일대일 대응이다. $f(1) = 4$ 일 때, $f(2) + f(3) + f(4)$ 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여
함수 f 는 X 에서 X 로의 일대일 대응이고
 $f(1) = 4$ 이므로 $\{f(2), f(3), f(4)\} = \{1, 2, 3\}$
 $\therefore f(2) + f(3) + f(4) = 1 + 2 + 3 = 6$

4. 두 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ 가 있다. A 에서 B 로의 일대일 함수 f 중 $f(1) = 4$ 를 만족하는 f 의 개수를 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$f(1) = 4$ 이므로 $\{2, 3\}$ 에서
 $\{5, 6, 7\}$ 로 가는 일대일 함수의 개수와 같다.
 $\therefore 3 \times 2 = 6$

5. 함수 $f(x) = ax$ 가 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 5

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax) = a(ax) = a^2x = x \text{에서}$$

$$a^2 = 1 \quad \therefore a = \pm 1$$

6. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{5, 6, 7\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 27

② 30

③ 33

④ 36

⑤ 39

해설

집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수는

$$a = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는

$$b = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$\therefore a + b = 27 + 6 = 33$$

7. 두 함수 $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - 1$ 이고 $(f \circ h)(x) = g(x)$ 일 때, $h(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$(f \circ h)(x) = g(x)$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 $f(h(1)) = g(1)$

한편, $g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ 이므로 $h(1) = k$ 라 하면

$f(k) = 1$ 에서 $f(k) = k + 3 = 1$ 이므로 $k = -2$

$\therefore h(1) = -2$

8. 두 집합 $X = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid a \leq y \leq b\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = 3x - 1$ 의 역함수 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 가 존재할 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

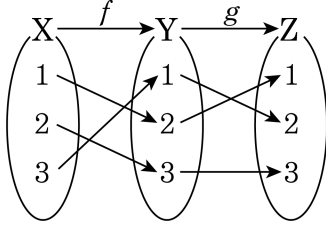
해설

함수 $f(x)$ 는 역함수가 존재하므로 일대일 대응이다. 따라서
함수 $f(x)$ 는 점 $(0, a)$, $(2, b)$ 를 지나야 한다.

$$a = f(0) = -1, b = f(2) = 5$$

$$\therefore a + b = 4$$

9. 두 함수 f, g 의 대응 관계가 다음 그림과 같을 때, $(f^{-1} \circ g)(2)$ 의 값은 얼마인가?



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(f^{-1} \circ g)(2) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(1)$
 f 의 역대응을 살펴보면 $f^{-1}(1) = 3$

10. 함수 $f(x) = x - 2$, $g(x) = -2x + 1$ 일 때, $(f \circ g^{-1})(x)$ 를 구하면?

- ① $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ ② $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ③ $y = \frac{1}{2}x$
④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

해설

$$(g^{-1})(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g^{-1})(x) &= f(g^{-1}(x)) \\ &= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) - 2 \\ &= -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

11. 함수 $f(x) = 4x^2 - kx (x \geq 0)$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 하고 $f^{-1}(2) = 1$ 일 때, $(f \circ f^{-1})(2) - (f^{-1} \circ f)(1)$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$f^{-1}(2) = 1 \text{ 이므로 } f(1) = 2$$

$$\text{따라서 } f(1) = 4 - k = 2$$

$$\therefore k = 2$$

$$(f \circ f^{-1})(2) = f(f^{-1}(2)) = f(1) = 2$$

$$(f^{-1} \circ f)(1) = f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(2) = 1$$

$$\therefore (f \circ f^{-1})(2) - (f^{-1} \circ f)(1) = 1$$

12. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^3 + 1$ 에 대하여 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(2)$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(2) = x \text{ 로 놓으면}$$

$$(g \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ g)(2) = x$$

$$(f^{-1} \circ g)(2) = x$$

$$g(2) = f(x)$$

$$2^3 + 1 = 2x - 1 \text{ 에서 } 9 = 2x - 1$$

$$\therefore x = 5$$

13. 다음 함수 중 우함수에는 ‘우’, 기함수에는 ‘기’, 우함수도 기함수도 아닌 함수는 ‘×’ 를 써 넣을 때, 알맞은 것은?

- (1) $f(x) = 3x + 1$ ()
(2) $f(x) = 3x^2 - 2$ ()
(3) $f(x) = x^3 - x$ ()

- ① ×, 우, 기 ② 우, ×, 기 ③ 기, 우, ×
④ 기, ×, 우 ⑤ 우, 기, ×

해설

- (1) $f(-x) = -3x + 1$
따라서 $f(x)$ 는 우함수도, 기함수도 아니다.
(2) $f(-x) = 3(-x)^2 - 2 = 3x^2 - 2$
따라서 $f(-x) = f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 우함수이다.
(3) $f(-x) = 3(-x)^3 - (-x) = -x^3 + x$
따라서 $f(-x) = -f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 기함수이다.

14. 다음 중 함수 $y = x - [x]$ (단, $-1 \leq x \leq 2$)의 값으로 가능한 것을 고르면? ($[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$-1 \leq x < 0$ 일 때, $[x] = -1 \quad \therefore y = x + 1$

$0 \leq x < 1$ 일 때, $[x] = 0 \quad \therefore y = x$

$1 \leq x < 2$ 일 때, $[x] = 1 \quad \therefore y = x - 1$

$x = 2$ 일 때, $[x] = 2 \quad \therefore y = 0$

따라서, $y = x - [x]$ ($-1 \leq x \leq 2$)의 값으로 가능한 것은 ③ 뿐이다.

15. 다음 보기 중 $X = \{-1, 1, 2\}$ 에서 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \rightarrow |x|^2$

㉡ $g : x \rightarrow x + 2$

㉢ $h : x \rightarrow |x| + 1$

㉣ $i : x \rightarrow x^2 - 1$

㉤ $j : x \rightarrow |x| + 3$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$

$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$

$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$

㉡ $g(-1) = -1 + 2 = 1 \in Y$

$g(1) = 1 + 2 = 3 \in Y$

$g(2) = 2 + 2 = 4 \in Y$

㉢ $h(-1) = |-1| + 1 = 2 \in Y$

$h(1) = |1| + 1 = 2 \in Y$

$h(2) = |2| + 1 = 3 \in Y$

㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$

㉤ $j(2) = 5 \notin Y$

그러므로 ㉠, ㉡은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

16. 1보다 큰 자연수 x 에 대하여 $f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$ 로 정의 할 때, $f(25)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{\frac{x - 1}{x}} = x + 1$$

$$\therefore f(25) = 26$$

17. 집합 $X = \{1, 2\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = ax - 3$, $g(x) = 2x + b$ 에 대하여 $f = g$ 가 되도록 하는 상수 a , b 에 대하여 $a - b$ 의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$f(1) = g(1)$ 에서 $a - 3 = 2 + b$
 $\therefore a - b = 5 \cdots \textcircled{㉠}$
 $f(2) = g(2)$ 에서 $2a - 3 = 4 + b$
 $\therefore 2a - b = 7 \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에서 $a = 2$, $b = -3$
 $\therefore a - b = 2 - (-3) = 5$

18. $f : X \rightarrow Y$ 가 상수함수이고, $f(100) = 100$ 일 때, $f(2006) = a$ 이다.
 $a + 100$ 의 값은?

① 0

② 100

③ 200

④ 300

⑤ 400

해설

상수함수에 정의에 의해 $f(x) = 100$

$\therefore f(2006) = 100 = a$

따라서 $a + 100 = 200$

19. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2$ 를 만족시킨다. 이때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2 \text{ 에서}$$

$$\frac{x+4}{2} = 2 \text{ 이면 } x = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(2) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

20. 함수 $f(x) = x + 1$ 라 할 때, $f^{10}(2)$ 의 값을 구하여라. (단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x+1) \\ &= (x+1) + 1 = x+2 \\ f^3(x) &= (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(x+1) \\ &= (x+1) + 2 = x+3 \\ f^4(x) &= (f^3 \circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(x+1) \\ &= (x+1) + 3 = x+4 \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

$$f^n(x) = x + n$$

$$\therefore f^{10}(2) = 2 + 10 = 12$$