**1.** $x$에 관한 삼차식 $x^3+mx^2+nx+1$을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이 때, $m+n$의 값은?

① $-\frac{19}{3}$ ② $-\frac{25}{6}$ ③ $-\frac{29}{6}$ ④ $-\frac{14}{3}$ ⑤ $-\frac{7}{2}$

해설

$f(x)=x^3+mx^2+nx+1$

$f(x)=(x+1)Q1(x)+5$으로 놓으면 $f(-1)=5$

$f(x)=(x-2)Q'(x)$으로 놓으면 $f(2)=0$

따라서, $f(-1)=-1+m-n+1=5$

$f(2)=8+4m+2n+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $m=\frac{1}{6},\ \ n=-\frac{29}{6}$

$\therefore\ m+n=-\frac{28}{6}=-\frac{14}{3}$

**2.** 다항식 $f(x)$를 $x-2,\ x-3$ 으로 나눌 때의 나머지가 각각 $3, 7$이라고 할 때, $f(x)$를 $(x-2)(x-3)$으로 나눌 때의 나머지는?

① $2x+3$ ② $3x-4$ ③ $4x-5$

④ $5x+6$ ⑤ $6x-7$

해설

$f(x)=(x-2)\,Q_1(x)+3,\ f(2)=3$
$f(x)=(x-3)\,Q_2(x)+7,\ f(3)=7$
$f(x)=(x-2)(x-3)\,Q_3(x)+ax+b$
$f(2)=2a+b=3, f(3)=3a+b=7$ 이다.
연립하면 $a=4,\ b=-5$
$\therefore$ 나머지는 $4x-5$

**3.** 다항식 $2x^3+3x^2+ax+b$가 $x+2$로 나누어 떨어질 때, $2a-b$의 값은?

① 28 ② 12 ③ 6 ④ $-4$ ⑤ $-12$

해설

준식을 $f(x)$라 하면 $f(-2)=0$이므로
$-16+12-2a+b=0$에서 $2a-b=-4$

**4.** 다항식 $(x+3)^4-6(x+3)^2+8$ 을 인수분해 하면 $(x+1)(x+5)g(x)$ 일 때, $g(-1)g(1)$ 의 값으로 옳은 것은?

① 28 ② 26 ③ 24 ④ 14 ⑤ 12

해설

$A=(x+3)^2$ 로 치환하면 주어진 식은

$$\begin{aligned} A^2-6A+8 &= (A-4)(A-2) \\ &= \left(x^2+6x+5\right)\left(x^2+6x+7\right) \\ &= (x+1)(x+5)(x^2+6x+7) \\ &= (x+1)(x+5)\,g(x) \end{aligned}$$

따라서, $g(x)=x^2+6x+7$

$\therefore\ g(-1)\times g(1)=2\times 14=28$

**5.** 다음 중 다항식 $x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$의 인수인 것은?

① $x+y+2$ ② $x-y+2$ ③ $x+2y+1$
④ $x-2y+1$ ⑤ $x+y+1$

해설

$x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$
$=x^2+(3y-1)x+2y^2-3y-2$
$=x^2+(3y-1)x+(2y+1)(y-2)$
$=(x+2y+1)(x+y-2)$

**6.** 다음 □안에 들어갈 식이 바르게 연결되지 <u>않은</u> 것은?

$$\begin{aligned}&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\&=(b-c)a^2-\boxed{\text{(가)}}\,a+\boxed{\text{(나)}}\,(b-c)\\&=\boxed{\text{(다)}}\,\{a^2-\boxed{\text{(라)}}\,a+\boxed{\text{(나)}}\}\\&=(b-c)(a-b)\boxed{\text{(마)}}\end{aligned}$$

① (가) $(b^2-c^2)$　② (나) $bc$　③ (다) $(b-c)$

④ (라) $(b+c)$　⑤ (마) $(c-a)$

**해설**

$$\begin{aligned}&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\&=(b-c)a^2+b^2c-ab^2+c^2a-bc^2\\&=(b-c)a^2-\boxed{(b^2-c^2)}\,a+\boxed{bc}\,(b-c)\\&=\boxed{(b-c)}\left\{a^2-\boxed{(b+c)}\,a+\boxed{bc}\right\}\\&=(b-c)(a-b)\boxed{(a-c)}\end{aligned}$$

**7.** $(125^2-75^2) \div \{5+(30-50)\div(-4)\}$ 의 값은?

① 75 ② 125 ③ 900 ④ 1000 ⑤ 1225

해설

$125^2-75^2=(125+75)(125-75)$
$=200\times 50=10000$
$5+(30-50)\div(-4)=5+5=10$ 이므로
(준 식)$=10000\div 10=1000$

**8.** 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x+2$, 최소공배수가 $x^3+3x^2-10x-24$라고 한다. 이 때, 두 다항식을 바르게 구한 것은?

① $x^2-x-6,\ x^2+6x+8$　② $x^2-3x-1,\ x^2+x+8$
③ $x^2-4x+3,\ x^2-x+2$　④ $x^2-x-2,\ x^2-3x+8$
⑤ $x^2-3x-6,\ x^2+3x+7$

해설

두 다항식을 $A=aG$, $B=bG$ ($a,\ b$는 서로소)라고 하면
두 식의 최대공약수가 $x+2$이므로
$A=a(x+2)$, $B=b(x+2)$
따라서, $L=ab(x+2)$
$=x^3+3x^2-10x-24$이다.
이 때, 최소공배수 $L$은 최대공약수 $x+2$를 인수로 가지므로
조립제법을 이용하면
$L=(x+2)(x-3)(x+4)$
$a,\ b$는 일차식이므로
$a=x-3$, $b=x+4$ 또는 $a=x+4$, $b=x-3$
따라서, 두 다항식은
$(x-3)(x+2)=x^2-x-6$과 $(x+4)(x+2)=x^2+6x+8$이다.

**9.** 두 다항식 $f(x) = x^2 + x + a$, $g(x) = 2x^2 + bx - 1$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, 두 다항식의 최소공배수를 구하면?

① $(x-1)(x-2)(2x-1)$ ② $(x-1)(x+1)(2x-1)$

③ $(x-1)(x+2)(2x+1)$ ④ $(x-1)(x+2)(x+3)$

⑤ $(x-1)(x+2)(x-2)$

해설

$f(1) = 0, 1 + 1 + 0 = a \quad \therefore \; a = -2$

$g(1) = 0, 2 + b - 1 = 0 \quad \therefore \; b = -1$

$\therefore \; f(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

$g(x) = 2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$

$\therefore$ 최소공배수 : $(x-1)(x+2)(2x+1)$

**10.** 최소공배수가 $x^3 - 3x + 2$ 이고, 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, 이차항의 계수가 1 인 두 다항식의 합을 구하면?

① $2x^2 + x - 1$ ② $2x^2 - x - 1$ ③ $2x^2 - x + 1$
④ $x^2 - x - 2$ ⑤ $x^2 - x + 2$

해설

$L = abG,\ G = x - 1$ 에서
$L = (x-1)^2(x+2)$
$A = (x-1)^2,\ B = (x-1)(x+2)$
$$\begin{aligned} A + B &= (x^2 - 2x + 1) + (x^2 + x - 2) \\ &= 2x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

**11.** 최고차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최소공배수가 $x^3-2x^2-5x+6$ 이고, 최대공약수가 $x+2$일 때, 두 다항식의 합은?

① $2x^2+x-6$ ② $2x^2-2x+3$ ③ $2x^2-3x+4$
④ $2x^2-6$ ⑤ $2x^2-8$

해설

두 다항식을 $A=aG$ , $B=bG$ ($a,\ b$ 는 서로소) 라고 하면
$L=abG=x^3-2x^2-5x+6$
이 때, 최대공약수 $G$ 가 $x+2$ 이므로 조립제법을 하여 $L$ 을 인수분해하면
$$\therefore\ L=(x^3-4x+3)(x+2)$$
$$=(x-1)(x-3)(x+2)$$
따라서, 구하는 두 이차 다항식은
$(x-1)(x+2)$ 와 $(x-3)(x+2)$ ,
즉 $x^2+x-2$ , $x^2-x-6$ 이다.
따라서, 두 다항식의 합은 $2x^2-8$ 이다.

**12.** 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형　　② 이등변삼각형
③ 정삼각형　　④ 직각이등변삼각형
⑤ 둔각삼각형

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 에서 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$

$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)=0$

$\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$ 이고,

$a,\ b,\ c$ 는 실수이므로, $a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

**13.** 함수 $f(x)=x^2+px+q$와 $g(x)$는 유리수를 계수로 갖는 다항식이고, $f(\sqrt{2}+1)=0$, $g(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}$이다. 이 때, $g(x)$를 $f(x)$로 나눈 나머지는?

① $x+1$ ② $x-1$ ③ $-x+1$
④ $-x-1$ ⑤ $2x+1$

해설

$g(x)$를 $f(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$
나머지를 $ax+b$라 하면
$g(x)=f(x)Q(x)+ax+b$
$$\begin{aligned} g(\sqrt{2}+1) &= f(\sqrt{2}+1)Q(\sqrt{2}+1)+a(\sqrt{2}+1)+b \\ &= a(\sqrt{2}+1)+b \ (\because \ f(\sqrt{2}+1)=0) \end{aligned}$$
$\therefore\ a+b+a\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$
$\therefore\ a=1,\ b=1$
따라서 구하는 나머지는 $x+1$

**14.** $x^{30}$ 을 $x-3$ 으로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R$ 라 하면 $Q(x)$ 의 계수의 총합 (상수항 포함) 과 $R$ 과의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{29}+1)$ ② $\frac{1}{2}\cdot 3^{30}$ ③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$ ⑤ $\frac{1}{2}(3^{29}-1)$

**해설**

$x^{30}=(x-3)Q(x)+R$

$x=3$ 을 대입하면 $3^{30}=R$

$Q(x)$ 의 계수의 총합은 $Q(1)$ 과 같으므로

$x=1$ 을 대입하면 $1=-2Q(1)+3^{30}$

$\therefore\ Q(1)=\frac{3^{30}-1}{2}$

$\therefore\ R-Q(1)=3^{30}-\frac{3^{30}-1}{2}=\frac{3^{30}+1}{2}=\frac{1}{2}(3^{30}+1)$

**15.** 다항식 $f(x)$는 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x^2+1) = x^4+5x^2+3$을 만족시킨다. $f(x^2-1)$을 구한 것은?

① $x^4+5x^2+1$　② $x^4+x^2-3$　③ $x^4-5x^2+1$
④ $x^4+x^2+3$　⑤ 답 없음

해설

$x^2+1=t$라 하면 $x^2=t-1$
주어진 식에 대입하면
$f(t)=(t-1)^2+5(t-1)+3$
$\therefore\ f(t)=t^2+3t-1$

$$\begin{aligned} f(x^2-1) &= (x^2-1)^2+3(x^2-1)-1 \\ &= x^4+x^2-3 \end{aligned}$$

**16.** 자연수 $n$에 대하여 다항식 $f(x) = x^n(x^2 + ax + b)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지가 $2^n(x-2)$일 때, $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는?

① $2 \cdot 3^n$ ② $3^n$ ③ $3^{n+1}$ ④ $4 \cdot 3^n$ ⑤ $3^2 n$

해설

$x^n(x^2+ax+b) = (x-2)^2 Q(x) + 2^n(x-2)$

$x^n\left(x^2+ax+b\right) = x^n(x-2)(x+\alpha)$이라 하면

$x^n(x-2)(x+\alpha)$

$= (x-2)\left\{(x-2)Q(x) + 2^n\right\}$

$\therefore x^n(x+\alpha) = (x-2)Q(x) + 2^n$

양변에 $x=2$를 대입하면

$2^n(2+\alpha) = 2^n$

$2 + a = 1$

$\therefore \alpha = -1$

$x^2 + ax + b = (x-1)(x-2)$

$\therefore\ a = -3, b = 2$

$f(x) = x^n\left(x^2 - 3x + 2\right)$이므로

$f(3) = 3^n(9-9+2)$

$= 2 \times 3^n$

**17.** $x$에 관한 항등식 $x^n(x^2+ax+b)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$가 성립할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 1　　② $-1$　　③ 2　　④ $-2$　　⑤ 5

해설

$x^n(x^2+ax+b)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$
위의 식에 $x=2$를 대입하면, $2^n(4+2a+b)=0$
$\therefore\ b=-2a-4(2^n\neq 0)\cdots$①
①을 준식에 대입하면,
$x^n(x^2+ax-2a-4)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$
$x^n(x-2)(x+a+2)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$
위의 식이 항등식이므로 다음 식도 항등식이다.
$x^n(x+a+2)=(x-2)p(x)+2^n$
다시 $x=2$를 대입하면,
$2^n(4+a)=2^n\quad\therefore\ a=-3$
$a=-3$을 ①에 대입하면,
$b=(-2)(-3)-4=2$
$\therefore\ a=-3,\ b=2$
$\therefore\ a+b=-1$

**18.** $(1-x-x^2)^{50} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{99}x^{99} + a_{100}x^{100}$ 라 할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = A$, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} = B$ 에 대하여 $A + 2B$ 의 값을 구하면?

① $-1$ ② $0$ ③ $1$ ④ $100$ ⑤ $1024$

**해설**

( i ) 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100} \cdots$ ㉠

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{99} + a_{100} \cdots$ ㉡

( ii ) ㉠+㉡ 하면 $2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{100})$

$\therefore\ a_0 + a_2 + \cdots + a_{100} = 1$

$\therefore\ A = 1$

㉠ − ㉡ 하면

$0 = 2(a_1 + a_3 + \cdots + a_{99})$

$a_1 + a_3 + \cdots + a_{99} = 0 \quad \therefore\ B = 0$

$\therefore\ A + 2B = 1$

**19.** 다항식 $A(x) = x^3 + px^2 + 3x + 1$을 다항식 $B(x) = x^2 + qx + 3$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하자. $B(x)$와 $R(x)$ 의 최대공약수가 $x - 1$일 때, $R(2)$ 의 값은?

① $-6$　② $-4$　③ $4$　④ $6$　⑤ $8$

해설

$A = BQ + R$에서 $A$, $B$ 의 $G.C.M.$과 $B$, $R$의 $G.C.M.$은 일치한다.
($\Leftarrow$ *Euclid* 호제법)
그러므로 $x - 1$은 $A(x)$, $B(x)$의 공약수이다.
$\therefore$ $A(1) = 0$ 에서 $p = -5$,
$B(1) = 0$에서 $q = -4$
$x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = (x^2 - 4x + 3)Q(x) + a(x - 1)$
양변에 $x = 3$을 대입하면 $-8 = 2a$ $\therefore$ $a = -4$
$\therefore$ $R(x) = -4(x - 1)$ $\therefore$ $R(2) = -4$