

1. 삼차식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 는 $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 6$ 을 만족한다. $f(x)$ 를 $x - 4$ 로 나누었을 때 나머지는?

① 8

② 10

③ 12

④ 14

⑤ 2

해설

$$f(1) = 1 + a + b + c = 2$$

$$f(2) = 8 + 4a + 2b + c = 4$$

$$f(3) = 27 + 9a + 3b + c = 6$$

세 식을 연립하면,

$$a = -6, b = 13, c = -6$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 6$$

$$\therefore f(4) = 64 + 16 \times (-6) + 4 \times 13 - 6 = 14$$

2. 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나눈 나머지가 $4x+3$ 일 때 $f(2x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는?

① -1 ② 0 ③ 3 ④ 7 ⑤ 11

해설

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + 4x + 3$$

$$x=2 \text{를 대입하면 } f(2) = 11$$

$f(2x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지를 R 이라 하면

$$f(2x) = (x-1)Q'(x) + R$$

$$x=1 \text{을 대입하면 } f(2) = R$$

$$\therefore R = 11$$

3. 다음 중 $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x + y$

② $-x - y$

③ $x + y - 2$

④ $x - y$

⑤ $2x + 2y$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= (x^2 + 2xy + y^2) - 2(x + y) \\&= (x + y)^2 - 2(x + y) \\&= (x + y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned}(x + y)(x + y - 2) &= -(-x - y)(x + y - 2) \\&= \frac{1}{2}(2x + 2y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

4. $16x^4 - 625y^4$ 을 옳게 인수분해한 것은?

① $(x + 5y)(2x - 5y)(4x^2 + 25y^2)$

② $(2x + y)(2x - 5y)(4x^2 + 25y^2)$

③ $(2x + 5y)(2x - 5y)(4x^2 + 25y^2)$

④ $(x + 5y)(x - 5y)(4x^2 + 25y^2)$

⑤ $(2x + 5y)(x - y)(4x^2 + 25y^2)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (4x^2)^2 - (25y^2)^2 \\ &= (4x^2 + 25y^2)(4x^2 - 25y^2) \\ &= (2x + 5y)(2x - 5y)(4x^2 + 25y^2)\end{aligned}$$

5. $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$ 을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$

② $(a-b)(b-c)(a-c)$

③ $-(b-a)(b-c)(c-a)$

④ $(a-b)(b-c)(c-a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c+a)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (c-b)a^2 + (b^2 - c^2)a + bc(c-b) \\ &= (c-b)\{a^2 - (c+b)a + bc\} \\ &= (c-b)(a-b)(a-c) \\ &= (a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

6. a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = 0$ 을 만족하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

- ① $\angle B = 120^\circ$ 인 둔각삼각형 ② 직각삼각형
③ $\angle B = 150^\circ$ 인 둔각삼각형 ④ 이등변삼각형
⑤ $\angle A = 35^\circ$ 인 예각삼각형

해설

$$\begin{aligned} & a^2b - a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b \\ &= a^2(b-c) + a(c+b)(c-b) + bc(b-c) \\ &= (b-c) \{a^2 + (c+b)a + bc\} \\ &= (b-c)(a+b)(a+c) \\ &\therefore b = c \quad (\because a+b \neq 0, a+c \neq 0) \end{aligned}$$

7. $10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + 6^2 - 5^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$ 의 값을 구하면?

① 51

② 52

③ 53

④ 54

⑤ 55

해설

$$\begin{aligned} & (10-9)(10+9) + (8-7)(8+7) + (6-5)(6+5) \\ & + (4-3)(4+3) + (2-1)(2+1) \\ & = 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 55 \end{aligned}$$

8. $a + b + c = 4$, $ab + bc + ca = 3$, $abc = 1$ 일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값을 구하면?

① 30

② 31

③ 32

④ 33

⑤ 34

해설

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\text{위 식에 따라 } a^2 + b^2 + c^2 + 6 = 16$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 10$$

$$a^3 + b^3 + c^3$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$

$$= 4 \times (10 - 3) + 3 \times 1$$

$$= 31$$

9. $x + y - 1 = 0$ 일 때, 다음 중 $2x^2 + y^2 - xy - 8$ 의 인수인 것은?

① $x - 1$

② $x + 1$

③ $x + 2$

④ $4x + 5$

⑤ $4x + 7$

해설

$$\begin{aligned} & x + y - 1 = 0 \text{ 에서 } y = -x + 1 \\ \therefore & 2x^2 + y^2 - xy - 8 \\ &= 2x^2 + (-x + 1)^2 - x(-x + 1) - 8 \\ &= 4x^2 - 3x - 7 \\ &= (4x - 7)(x + 1) \end{aligned}$$

10. x 에 관한 3차식 $x^3+px^2-q^2$, $x^3-(3q-p)x+2(q-1)$ 의 최대공약수가 $x-1$ 일 때, pq 의 값을 구하면?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$f(x) = x^3 + px^2 - q^2$,
 $q(x) = x^3 - (3q - p)x + 2(q - 1)$ 라 놓으면
최대공약수가 $x - 1$ 이므로
 $f(1) = 1 + p - q^2 = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $g(1) = 1 - (3q - p) + 2(q - 1) = 0$ 에서
 $p - q - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $q^2 - q - 2 = 0, (q - 2)(q + 1) = 0$
(i) $q = 2$ 일 때, $\textcircled{2} p = 3$
 $f(x) = (x - 1)(x + 2)^2, g(x) = (x - 1)^2(x + 2)$
 $\therefore G.C.D$ 가 $x - 1$ 이라는 것에 모순
(ii) $q = -1$ 일 때, $\textcircled{2} p = 0$
 $f(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1),$
 $g(x) = (x - 1)(x^2 + x + 4)$
 $\therefore G.C.D$ 는 $x - 1$
 $\therefore pq = 0$

11. 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x+2$ 이고, 최소공배수가 x^3+x^2-2x 일 때, 두 이차식의 합은?

- ① $2x^2+3x+2$ ② $2x^2-3x-2$ ③ x^2-3x-2
④ $2x^2+3x-2$ ⑤ x^2-3x+2

해설

$$A = Ga, B = Gb \quad (a, b \text{ 는 서로소})$$

$$G = x + 2$$

$$L = x^3 + x^2 + 2x = x(x+2)(x-1) = Gab$$

$$A = x(x+2) = x^2 + 2x$$

$$B = (x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$$

$$A + B = 2x^2 + 3x - 2$$

12. $(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$ 을 간단히 하면?

① $4^8 + 3^8$

② $4^{15} - 3^{15}$

③ $4^{15} + 3^{15}$

④ $4^{16} - 3^{16}$

⑤ $4^{16} + 3^{16}$

해설

$$\begin{aligned} & (4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8) \\ &= (4-3)(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8) \\ &= (4^2-3^2)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8) \\ &= (4^4-3^4)(4^4+3^4)(4^8+3^8) \\ &= (4^8-3^8)(4^8+3^8) \\ &= 4^{16}-3^{16} \end{aligned}$$

13. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^{100}-1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{100}(x-1)^{100}$ 이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^m+k$ 이다. $m+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 98

해설

$x=0$ 을 대입하면

$$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{100}=-1\cdots\textcircled{1}$$

$x=2$ 를 대입하면

$$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=2^{100}-1\cdots\textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2}: 2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100})=2^{100}-2$$

$$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^{99}-1$$

$$\therefore m=99, k=-1 \text{ 이므로 } m+k=98$$

14. $x-1$ 로 나누면 나머지가 3, $x-2$ 로 나누면 나머지가 7, $x-3$ 으로 나누면 나머지가 13이 되는 가장 낮은 차수의 다항식을 $f(x)$ 라 할 때, $f(-3)$ 의 값은?

① 7 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

$$f(x) = k(x-1)(x-2)(x-3) + ax^2 + bx + c$$

$$f(1) = a + b + c = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(2) = 4a + 2b + c = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$f(3) = 9a + 3b + c = 13 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1$$

$f(x)$ 가 가장 낮은 차수가 되려면 $k = 0$

$$\therefore f(x) = x^2 + x + 1,$$

$$f(-3) = (-3)^2 + (-3) + 1 = 7$$

15. 1000^{10} 을 1001로 나눌 때 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R 라 할 때, 다음 중 나머지 R 를 구하기 위한 가장 적절한 식은?

① $x^{10} = xQ(x) + R$

② $x^{10} = (x - 1)Q(x) + R$

③ $x^{10} = (x + 1)Q(x) + R$

④ $x^{10} = (x - 1)^{10}Q(x) + R$

⑤ $x^{10} = (x + 1)Q(x) + R + 1$

해설

$1000^{10} = 1001 \cdot Q(x) + R$ 에서 $1000 = x$ 라 하면

$$x^{10} = (x + 1)Q(x) + R$$

$x = -1$ 을 대입하면 $R = 1$ 을 구할 수 있다.

16. 세 실수 a, b, c 가 $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, $a^3 + b^3 + c^3 = 24$ 를 만족시킬 때, $a^4 + b^4 + c^4 + 1$ 의 값을 구하면?

① 69 ② 70 ③ 71 ④ 72 ⑤ 73

해설

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3 \cdots \textcircled{1} \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 9 \cdots \textcircled{2} \\ a^3 + b^3 + c^3 &= 24 \cdots \textcircled{3} \text{ 이라 하면,} \\ \textcircled{2} \text{식에서} \\ a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 9 \\ 9 - 2(ab + bc + ca) &= 9 \\ \therefore ab + bc + ca &= 0 \cdots \textcircled{4} \\ \textcircled{3} \text{식에서} \\ a^3 + b^3 + c^3 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ 24 &= 3 \cdot (9 - 0) + 3abc \\ \therefore abc &= -1 \cdots \textcircled{5} \\ a^4 + b^4 + c^4 + 1 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 1 \\ &= 81 - 2 \cdot 6 + 1 = 70 \\ (\because a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) \\ &= 0 - 2 \times (-1) \times 3 \\ &= 6) \end{aligned}$$

17. x^{100} 을 $x+2$ 로 나눈 몫을 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{99}x^{99}$ 라 할 때,
 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{99}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{5}(1-2^{100})$ ② $\frac{1}{6}(1-2^{100})$ ③ $\frac{1}{4}(1-2^{100})$
 ④ $\frac{1}{3}(1-2^{100})$ ⑤ 1

해설

(i) $f(x) = x^{100} = (x+2)Q(x) + R$ 라 하면

$$f(-2) = 2^{100} = R$$

$$\therefore R = 2^{100}$$

$$f(1) = 3Q(1) + R$$

$$\therefore Q(1) = \frac{1}{3}(1-R) = \frac{1}{3}(1-2^{100})$$

(ii) $Q(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{99}x^{99}$

$$\therefore Q(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_{99}$$

$$\therefore a_0 + a_1 + \cdots + a_{99} = Q(1) = \frac{1}{3}(1-2^{100})$$

18. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 때, $f(x)$ 를 $(x+1)(x-1)^2$ 으로 나눌 때, 나머지를 ax^2+bx+c 라 하면 $a+b+c$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지가 4이므로
 $f(-1)=4$
 $f(x)=(x-1)^2Q(x)\cdots\textcircled{1}$
 $f(x)=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+ax^2+bx+c$
 $\qquad=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+a(x-1)^2\ (\because \textcircled{1})$
양변에 $x=-1$ 를 대입하면
 $f(-1)=4a=4\therefore a=1$
 $ax^2+bx+c=a(x-1)^2=x^2-2x+1$
 $\therefore b=-2, c=1$
 $\therefore a+b+c=0$

해설

ax^2+bx+c 를 구하는 것이 아니라 $a+b+c$ 를 통째로 구할 때는 다음과 같이 풀 수 있다.
 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누어 떨어지므로 $f(1)=0$
 $f(x)=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+ax^2+bx+c$
양변에 $x=1$ 를 대입하면
 $f(1)=0+(a+b+c)=0$
 $\therefore a+b+c=0$

19. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

- ① -8
- ② -4
- ③ 0
- ④ 4
- ⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.

i) $x = 3 \Rightarrow e = 1$
ii) $x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$
iii) $x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$
iv) $x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$
v) $x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$
위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.
 $a = 1, b = 4, c = 6, d = 4, e = 1$
 $\therefore 2c - bd = -4$

해설

$x - 2 = t$ 라 하면 $x - 3 = t - 1$
(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$
다음처럼 조립제법으로 $t-1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

1	1	0	0	0	0
		1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
		1	2	3	
1	1	2	3	4	
		1	3		
1	1	3	6		
		1			
a=1	1	4			

$\therefore 2c - bd = -4$