

1. x 에 관한 항등식 $(x^2+x+1)^5 = a_{10}(x+1)^{10} + a_9(x+1)^9 + \cdots + a_1(x+1) + a_0$ 에서 $a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + a_{10}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

주어진 식에 $x = 0$ 을 대입하면

$$(0 + 0 + 1)^5 = a_{10} + a_9 + \cdots + a_1 + a_0$$

$$\therefore a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + a_{10} = 1$$

2. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$, $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지를 각각 m, n 이라 하자. 이 때 $f(x)$ 를 $(x+1)(x-1)$ 로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 를 m 과 n 이 포함된 식으로 나타내면?

① $R(x) = (m-n)x + (m+n)$

② $R(x) = (m+n)x + (m-n)$

③ $R(x) = (m-n)x - (m+n)$

④ $R(x) = \frac{m-n}{2}x + \frac{m+n}{2}$

⑤ $R(x) = \frac{m+n}{2}x + \frac{m-n}{2}$

해설

주어진 조건으로 식을 세우면 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q_1(x) + m \\ &= (x+1)Q_2(x) + n \end{aligned}$$

$$f(x) = (x-1)(x+1)Q_3(x) + R(x)$$

$$\therefore, f(1) = R(1) = m \cdots \text{①}$$

$$f(-1) = R(-1) = n \cdots \text{②}$$

$R(x) = ax + b$ 라 하면 ①, ②에 의해

$a + b = m, -a + b = n$ 이므로

$$a = \frac{m-n}{2}, b = \frac{m+n}{2}$$

$$\therefore R(x) = \frac{m-n}{2}x + \frac{m+n}{2}$$

3. 다항식 $f(x) = x^2 + ax + b$ 에 대하여 $f(x) - 2$ 는 $x - 1$ 로 나누어 떨어지고, $f(x) + 2$ 는 $x + 1$ 로 나누어떨어진 다. 이 때, $a - 2b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) - 2$ 는 $x - 1$ 로 나누어떨어지므로

$$f(1) - 2 = 0 \therefore 1 + a + b - 2 = 0$$

$$\therefore a + b = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$f(x) + 2$ 는 $x + 1$ 로 나누어떨어지므로

$$f(-1) + 2 = 0 \therefore 1 - a + b + 2 = 0$$

$$\therefore -a + b = -3 \cdots \textcircled{2}$$

①, ② 에서 $a = 2, b = -1$

$$\therefore a - 2b = 4$$

4. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b 를 $x-1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} k & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & a \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \underline{5} \end{array}$$

- ① $a=3$
- ② $b=2$
- ③ $c=1$
- ④ $d=4$
- ⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & -1 & b \\ & & 1 & a+1 & a \\ \hline & 1 & a+1 & a & \underline{b+a} \end{array}$$

$k=1, a=3, b=2, c=1, d=4$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

5. 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립할 때, $x^2 - y^2$ 의 값은?

$$[(x+y)^n + (x-y)^n]^2 - [(x+y)^n - (x-y)^n]^2 = 4 \times 3^n$$

- ① 3
- ② 4
- ③ 6
- ④ 7
- ⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} & [(x+y)^n + (x-y)^n]^2 - [(x+y)^n - (x-y)^n]^2 \\ &= 4 \times 3^n \\ & 4[(x+y)(x-y)]^n = 4 \times 3^n \\ & 4(x^2 - y^2)^n = 4 \times 3^n \\ & \therefore x^2 - y^2 = 3 \end{aligned}$$

6. 다항식 $P(x) = x^4 + 2x^3 + kx^2 - 2x + 8$ 가 $x - 1$ 로 나누어 떨어지도록 상수 k 의 값을 정할 때 다음 중 $P(x)$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x - 1$ ② $x + 1$ ③ $x - 2$ ④ $x + 2$ ⑤ $x + 4$

해설

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)Q(x) \\ \therefore P(1) &= 1 + 2 + k - 2 + 8 = 0 \\ \therefore k &= -9 \\ \therefore P(x) &= x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8 \\ &= (x-1)(x-2)(x+1)(x+4) \end{aligned}$$

7. $\frac{2002^3 - 1}{2002 \times 2003 + 1}$ 의 값을 구하면?

- ① 1999 ② 2000 ③ 2001 ④ 2002 ⑤ 2003

해설

$a = 2002$ 로 치환하면

$$\frac{a^3 - 1}{a(a + 1) + 1} = \frac{(a - 1)(a^2 + a + 1)}{a^2 + a + 1} = a - 1$$

$$\therefore 2002 - 1 = 2001$$

8. 다음 두 다항식이 서로 소가 아닐 때, 상수 a 의 모든 값의 합은?

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \quad x^2 - 3x + a$

- ① -10
- ② -8
- ③ -5
- ④ 0
- ⑤ 3

해설

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 을 조립제법으로 인수분해하면
 $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$
각각의 경우에 대해 나머지 정리를 이용한다
i) $x = 1 \Rightarrow 1 - 3 + a = 0, a = 2$
ii) $x = 2 \Rightarrow 4 + 6 + a = 0, a = -10$
iii) $x = 3 \Rightarrow 9 - 9 + a = 0, a = 0$
 $\therefore a$ 의합 : $2 + (-10) + 0 = -8$

9. 두 다항식 $x^2 + ax - 2$, $x^2 - 5x + b$ 의 최대공약수가 $x - 2$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -5

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 5

해설

각 식에 $x = 2$ 을 대입하면 0이 된다.

i) $x^2 + ax - 2$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$$4 + 2a - 2 = 0 \therefore a = -1$$

ii) $x^2 - 5x + b$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$$4 - 10 + b = 0 \therefore b = 6$$

$$\therefore a + b = -1 + 6 = 5$$

10. 이차항의 계수가 1인 두 다항식 A, B 의 최대공약수가 $x + 1$ 이고, 최소공배수가 $x^3 - 3x - 2$ 일 때, $A + B$ 를 구하면?

① $(x - 1)(x + 1)$

② $(x - 1)(2x + 1)$

③ $(x - 1)(2x - 1)$

④ $(x + 1)(2x - 1)$

⑤ $(x + 1)(2x + 1)$

해설

$$A = Ga, \quad B = Gb \text{ (a, b는서로소)}, \quad L = Gab$$

$$L = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2)$$

$$= (x + 1)(x - 2)(x + 1)$$

$$A + B = (x + 1)(x + 1) + (x + 1)(x - 2)$$

$$= (x + 1)(x + 1 + x - 2) = (x + 1)(2x - 1)$$

11. 최고차항의 계수가 1인 두 이차식의 최대공약수가 $x+3$ 이고 최소공배수가 x^3+x^2-6x 일 때, 두 이차식의 합은?

① $(x+1)(x-2)$

② $(x+2)(x+4)$

③ $2(x-1)(x+3)$

④ $2(x-2)(x-4)$

⑤ $2(x+1)(x-4)$

해설

최대공약수가 $x+3$ 이므로 두 이차식을 $a(x+3)$, $b(x+3)$ (a, b 는 서로소)라 하고
최소공배수를 $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$ 라 하면
 $f(x) = x(x^2 + x - 6) = x(x+3)(x-2)$
따라서 두 다항식은
 $x(x+3)$, $(x-2)(x+3)$ 이므로
구하는 두 다항식의 합은
 $x(x+3) + (x-2)(x+3) = (x+3)(2x-2)$
 $= 2(x-1)(x+3)$

12. 자연수 a, b 의 최대공약수를 (a, b) 로 나타낼 때, 다음과 같은 성질이 알려져 있다.

a 를 b 로 나누었을 때 몫을 q , 나머지를 r 라고 하면 $a = bq + r$ ($0 \leq r < b$)이고,
이 때, $(a, b) = (b, r)$ 가 성립한다.

다음은 위의 성질을 이용하여 1996 과 240 의 최대공약수를 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것은?

$(1996, 240) = (240, (가)) = ((가), 12) = (12, (나)) = (나)$

- ① (가)= 74, (나)= 2
- ② (가)= 72, (나)= 6
- ③ (가)= 78, (나)= 2
- ④ (가)= 76, (나)= 6
- ⑤ (가)= 76, (나)= 4

해설

$1996 = 240 \cdot 8 + 76, 240 = 76 \cdot 3 + 12$
 $76 = 12 \cdot 6 + 4$ 이므로
 $(1996, 240) = (240, 76) = (76, 12) = (12, 4) = 4$

13. 실수 x 가 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 을 만족할 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

- ① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

준식의 양변을 x 로 나누면

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 3^3 - 3 \times 3 = 18 \end{aligned}$$

14. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 모든 모서리의 길이의 합이 20m이고 대각선의 길이가 3m일 때, 이 상자의 겉넓이는 몇 m²인가?

① 12m² ② 13m² ③ 14m² ④ 15m² ⑤ 16m²

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c 라 하면

$$4(a + b + c) = 20, a + b + c = 5$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3, a^2 + b^2 + c^2 = 9$$

$$\begin{aligned} \text{(겉넓이)} &= 2(ab + bc + ca) \\ &= (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 25 - 9 = 16(\text{m}^2) \end{aligned}$$

15. 다항식 $f(x) = x^4 + ax + b$ 가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지도록 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 3 ④ -4 ⑤ -3

해설

$$\begin{aligned} \text{(i) } f(x) &= x^4 + ax + b = (x-1)^2 Q(x) \\ f(1) &= 1 + a + b = 0 \\ \therefore b &= -(a+1) \\ \text{(ii) } f(x) &= x^4 + ax - (a+1) = (x-1)^2 Q(x) \\ (x^4 - 1) + a(x-1) &= (x-1)^2 Q(x) \\ (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + a(x-1) &= (x-1)^2 Q(x) \\ \therefore x^3 + x^2 + x + 1 + a &= (x-1)Q(x) \\ x=1 \text{을 대입하면 } 4 + a &= 0 \quad \therefore a = -4 \\ b = -(a+1) \text{에서 } b &= 3 \\ \therefore a + b &= -1 \end{aligned}$$

16. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라고 할 때, $Q(x)$ 의 계수의 총합(상수항 포함)과 R 와의 차는?

- ① $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$ ② $\frac{1}{2} \cdot 2^{30}$ ③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $2(3^{30}+1)$ ⑤ $2(3^{30}-1)$

해설

문제의 조건으로부터

$$x^{30} = (x-3)Q(x) + R \cdots \textcircled{1}$$

이므로 몫 $Q(x)$ 는 29차의 다항식이다.

①의 양변에 $x=3$ 을 대입하면 $R=3^{30}$

여기에서 몫은 29차의 다항식이므로

$$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{29}x^{29}$$

으로 놓으면 $Q(x)$ 의 계수의 총합은

$x=1$ 을 대입한

$$Q(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{29} \text{과 같다.}$$

따라서 구하는 차는 $|Q(1)-R| \cdots \textcircled{2}$

한편 ①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 = -2Q(1) + R \therefore Q(1) = \frac{1}{2}(R-1)$$

이 값을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} |Q(1)-R| &= \left| \frac{1}{2}(R-1) - R \right| = \frac{|R+1|}{2} \\ &= \frac{|3^{30}+1|}{2} = \frac{1}{2}(3^{30}+1) \end{aligned}$$

17. 다항식 $f_1(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_2(x)$, 나머지가 r_1 이고 다시 $f_2(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_3(x)$, 나머지가 r_2 이다. 이와 같은 방법으로 $f_n(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_{n+1}(x)$, 나머지가 r_n 이고 $f_1(x)$ 를 $(x-1)^n$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $R(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는?

- ① 0

② 1
- ③ r_1

④ $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$
- ⑤ $r_1 r_2 \cdots r_n$

해설

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= (x-1)f_2(x) + r_1 \\
 &= (x-1)\{(x-1)f_3(x) + r_2\} + r_1 \\
 &= (x-1)^2 f_3(x) + r_2(x-1) + r_1 \\
 &= (x-1)^2 \{(x-1)f_4(x) + r_3\} + r_2(x-1) + r_1 \\
 &= (x-1)^3 f_4(x) + r_3(x-1)^2 + r_2(x-1) + r_1 \\
 &\vdots \\
 &= (x-1)^n f_{n+1}(x) + r_n(x-1)^{n-1} + r_{n-1}(x-1)^{n-2} + \cdots \\
 &\quad + r_2(x-1) + r_1 \\
 R(x) &= r_n(x-1)^{n-1} + \cdots + r_2(x-1) + r_1 \\
 \therefore R(2) &= r_n + r_{n-1} + \cdots + r_2 + r_1
 \end{aligned}$$

18. 함수 $f(n) = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ 으로 정의할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2007)$ 을 10으로 나눈 나머지는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2007)$ 의 일의 자리만 보면 된다.
 $f(5)$ 이후부터는 10으로 나누어떨어지므로
10으로 나누어떨어지지 않는 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 까지 더하면
 $1 + 2 + 6 + 24 = 33$
따라서 $f(1) + f(2) + \cdots + f(2007)$ 을 10으로 나눈 나머지는 3이다.

19. 두 다항식 $x^3 + x^2 + x + 3 + m$, $x^2 - x + m$ 이 서로소가 아닐 때, 상수 m 의 값을 구하면?

① $-1, 2$ ② $-2, 3$ ③ $-1, 2$ ④ $-1, 3$ ⑤ $-2, 2$

해설

서로소가 아니라는 것은 일차이상의 공약수가 존재한다는 뜻이다.

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 3 + m \cdots \textcircled{㉠}$$

$$g(x) = x^2 - x + m \cdots \textcircled{㉡}$$

으로 놓으면

$$f(x) - g(x) = x^3 + 2x + 3 = (x + 1)(x^2 - x + 3)$$

㉠과 ㉡이 서로소가 아니므로 ㉠과 ㉡의 최대공약수는

$x + 1$ 또는 $x^2 - x + 3$ 이다.

(i) $x + 1$ 이 최대공약수일 때, $m = -2$

(ii) $x^2 - x + 3$ 이 최대공약수일 때, 이 식과 $g(x)$ 는 서로 같아야 하므로 $m = 3$

(i), (ii)에서 $m = -2$ 또는 3