1. x에 관한 항등식 $(x^2+x+1)^5 = a_{10}(x+1)^{10}+a_9(x+1)^9+\cdots+a_1(x+1)+a_0$에서 $a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}$의 값은?

① 0　② 1　③ 16　④ 32　⑤ 64

해설

주어진 식에 $x=0$을 대입하면

$(0+0+1)^5 = a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$

$\therefore\ a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}=1$

2. 다항식 $f(x)$를 $x-1$, $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 각각 m, n이라 하자. 이 때 $f(x)$를$(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$를 m과 n이 포함된 식으로 나타내면?

① $R(x) = (m-n)x + (m+n)$

② $R(x) = (m+n)x + (m-n)$

③ $R(x) = (m-n)x - (m+n)$

④ $R(x) = \dfrac{m-n}{2}x + \dfrac{m+n}{2}$

⑤ $R(x) = \dfrac{m+n}{2}x + \dfrac{m-n}{2}$

해설

주어진 조건으로 식을 세우면 각각 다음과 같다.

$f(x) = (x-1)\,Q_1(x) + m$

$\qquad = (x+1)\,Q_2(x) + n$

$f(x) = (x-1)(x+1)\,Q_3(x) + R(x)$

즉, $f(1) = R(1) = m \cdots$ ①

$f(-1) = R(-1) = n \cdots$ ②

$R(x) = ax + b$라 하면 ①, ②에 의해

$a + b = m,\ -a + b = n$이므로

$a = \dfrac{m-n}{2},\ b = \dfrac{m+n}{2}$

$\therefore R(x) = \dfrac{m-n}{2}x + \dfrac{m+n}{2}$

3. 다항식 $f(x) = x^2 + ax + b$ 에 대하여 $f(x) - 2$ 는 $x - 1$ 로 나누어떨어지고, $f(x) + 2$ 는 $x + 1$ 로 나누어떨어진다. 이 때, $a - 2b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) - 2$는 $x - 1$로 나누어떨어지므로

$f(1) - 2 = 0 \therefore\ 1 + a + b - 2 = 0$

$\therefore\ a + b = 1 \cdots$ ①

$f(x) + 2$는 $x + 1$로 나누어떨어지므로

$f(-1) + 2 = 0 \therefore\ 1 - a + b + 2 = 0$

$\therefore\ -a + b = -3 \cdots$ ②

①, ② 에서 $a = 2,\ b = -1$

$\therefore\ a - 2b = 4$

4. x에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} k & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & a \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{5} \end{array}$$

① $a=3$ ② $b=2$ ③ $c=1$

④ $d=4$ ⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & -1 & b \\ & & 1 & a+1 & a \\ \hline & 1 & a+1 & a & \boxed{b+a} \end{array}$$

$k=1,\ a=3,\ b=2,\ c=1,\ d=4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

5. 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립할 때, x^2-y^2의 값은?

$$[(x+y)^n+(x-y)^n]^2-[(x+y)^n-(x-y)^n]^2=4\times 3^n$$

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 7 ⑤ 9

해설

$[(x+y)^n+(x-y)^n]^2-[(x+y)^n-(x-y)^n]^2$

$=4\times 3^n$

$4\{(x+y)(x-y)\}^n=4\times 3^n$

$4(x^2-y^2)^n=4\times 3^n$

$\therefore\ x^2-y^2=3$

6. 다항식 $P(x) = x^4 + 2x^3 + kx^2 - 2x + 8$가 $x - 1$로 나누어 떨어지도록 상수 k의 값을 정할 때 다음 중 $P(x)$의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x - 1$ ② $x + 1$ ③ $x - 2$ ④ $x + 2$ ⑤ $x + 4$

해설

$P(x) = (x - 1)Q(x)$

$\therefore\ P(1) = 1 + 2 + k - 2 + 8 = 0$

$\therefore\ k = -9$

$\therefore\ P(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8$

$= (x - 1)(x - 2)(x + 1)(x + 4)$

7. $\dfrac{2002^3 - 1}{2002 \times 2003 + 1}$ 의 값을 구하면?

① 1999　② 2000　③ 2001　④ 2002　⑤ 2003

해설

$a = 2002$로 치환하면

$$\frac{a^3 - 1}{a(a+1)+1} = \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1} = a - 1$$

$\therefore\ 2002 - 1 = 2001$

8. 다음 두 다항식이 서로 소가 아닐 때, 상수 a의 모든 값의 합은?

$$x^3-2x^2-5x+6, \quad x^2-3x+a$$

① -10 ② -8 ③ -5 ④ 0 ⑤ 3

해설

x^3-2x^2-5x+6을 조립제법으로 인수분해하면

$(x-1)(x+2)(x-3)$

각각의 경우에 대해 나머지 정리를 이용한다

i) $x=1 \Rightarrow 1-3+a=0,\ a=2$

ii) $x=2 \Rightarrow 4+6+a=0,\ a=-10$

iii) $x=3 \Rightarrow 9-9+a=0,\ a=0$

$\therefore$ a의합 : $2+(-10)+0=-8$

9. 두 다항식 x^2+ax-2, x^2-5x+b의 최대공약수가 $x-2$일 때, $a+b$의 값은?

① -5 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

해설

각 식에 $x=2$을 대입하면 0이 된다.

i) x^2+ax-2에 $x=2$를 대입하면

$4+2a-2=0 \therefore\ a=-1$

ii) x^2-5x+b에 $x=2$를 대입하면

$4-10+b=0 \therefore\ b=6$

$\therefore\ a+b=-1+6=5$

10. 이차항의 계수가 1 인 두 다항식 A, B 의 최대공약수가 $x+1$ 이고, 최소공배수가 x^3-3x-2 일 때, $A+B$를 구하면?

① $(x-1)(x+1)$

② $(x-1)(2x+1)$

③ $(x-1)(2x-1)$

④ $(x+1)(2x-1)$

⑤ $(x+1)(2x+1)$

해설

$A = Ga, \quad B = Gb$(a , b는서로소), $\quad L = Gab$

$$L = x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 2)$$
$$= (x+1)(x-2)(x+1)$$
$$A + B = (x+1)(x+1) + (x+1)(x-2)$$
$$= (x+1)(x+1+x-2) = (x+1)(2x-1)$$

11. 최고차항의 계수가 1인 두 이차식의 최대공약수가 $x+3$이고 최소공배수가 x^3+x^2-6x일 때, 두 이차식의 합은?

① $(x+1)(x-2)$　② $(x+2)(x+4)$

③ $2(x-1)(x+3)$　④ $2(x-2)(x-4)$

⑤ $2(x+1)(x-4)$

해설

최대공약수가 $x+3$ 이므로 두 이차식을

$a(x+3)$, $b(x+3)$ ($a,\ b$ 는 서로소)라 하고

최소공배수를 $f(x)=x^3+x^2-6x$ 라 하면

$f(x)=x(x^2+x-6)=x(x+3)(x-2)$

따라서 두 다항식은

$x(x+3)$, $(x-2)(x+3)$ 이므로

구하는 두 다항식의 합은

$$\begin{aligned} x(x+3)+(x-2)(x+3) &= (x+3)(2x-2) \\ &= 2(x-1)(x+3) \end{aligned}$$

12. 자연수 a, b의 최대공약수를 (a, b)로 나타낼 때, 다음과 같은 성질이 알려져 있다.

a를 b로 나누었을 때 몫을 q, 나머지를 r라고 하면 $a = bq + r$ $(0 \leq r < b)$이고, 이 때, $(a,\ b) = (b,\ r)$가 성립한다.

다음은 위의 성질을 이용하여 1996 과 240 의 최대공약수를 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것은?

$(1996, 240) = (240,$ (가)$)=($(가)$,\ 12) = (12,$ (나)$)=$(나)

① (가)$= 74$, (나)$= 2$

② (가)$= 72$, (나)$= 6$

③ (가)$= 78$, (나)$= 2$

④ (가)$= 76$, (나)$= 6$

⑤ (가)$= 76$, (나)$= 4$

해설

$1996 = 240 \cdot 8 + 76,\ 240 = 76 \cdot 3 + 12$

$76 = 12 \cdot 6 + 4$ 이므로

$(1996,\ 240) = (240,\ 76) = (76,\ 12) = (12,\ 4) = 4$

13. 실수 x가 $x^2 - 3x + 1 = 0$을 만족할 때, $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$의 값을 구하면?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

준식의 양변을 x로 나누면

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 3^3 - 3 \times 3 = 18$$

14. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 모든 모서리의 길이의 합이 $20\,\mathrm{m}$ 이고 대각선의 길이가 $3\,\mathrm{m}$ 일 때, 이 상자의 겉넓이는 몇 m^2 인가?

① $12\,\mathrm{m}^2$　② $13\,\mathrm{m}^2$　③ $14\,\mathrm{m}^2$　④ $15\,\mathrm{m}^2$　⑤ $16\,\mathrm{m}^2$

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c 라 하면

$4(a+b+c)=20,\ a+b+c=5$

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3,\ a^2+b^2+c^2=9$

$$
\begin{aligned}
(\text{겉넓이}) &= 2(ab+bc+ca) \\
&= (a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2) \\
&= 25-9=16(\mathrm{m}^2)
\end{aligned}
$$

15. 다항식 $f(x)=x^4+ax+b$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지도록 a,b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을구하면?

① 1 ② -1 ③ 3 ④ -4 ⑤ -3

해설

(i) $f(x)=x^4+ax+b=(x-1)^2Q(x)$

$f(1)=1+a+b=0$

$\therefore\ b=-(a+1)$

(ii) $f(x)=x^4+ax-(a+1)=(x-1)^2Q(x)$

$(x^4-1)+a(x-1)=(x-1)^2Q(x)$

$(x-1)(x^3+x^2+x+1)+a(x-1)$

$=(x-1)^2Q(x)$

$\therefore\ x^3+x^2+x+1+a=(x-1)Q(x)$

$x=1$을 대입하면 $4+a=0\ \therefore\ a=-4$

$b=-(a+1)$에서 $b=3$

$\therefore a+b=-1$

16. x^{30}을 $x-3$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 할 때, $Q(x)$의 계수의 총합(상수항 포함)과 R와의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$　② $\frac{1}{2}\cdot 2^{30}$　③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$

④ $2(3^{30}+1)$　⑤ $2(3^{30}-1)$

해설

문제의 조건으로부터

$x^{30}=(x-3)Q(x)+R\cdots$㉠

이므로 몫 $Q(x)$는 29차의 다항식이다.

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면 $R=3^{30}$

여기에서 몫은 29차의 다항식이므로

$Q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{29}x^{29}$

으로 놓으면 $Q(x)$의 계수의 총합은

$x=1$을 대입한

$Q(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{29}$과 같다.

따라서 구하는 차는 $|Q(1)-R|\cdots$㉡

한편 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1=-2Q(1)+R$ $\therefore$ $Q(1)=\frac{1}{2}(R-1)$

이 값을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}|Q(1)-R| &= \left|\frac{1}{2}(R-1)-R\right| = \frac{|R+1|}{2}\\ &= \frac{|3^{30}+1|}{2} = \frac{1}{2}(3^{30}+1)\end{aligned}$$

17. 다항식 $f_1(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_2(x)$, 나머지가 r_1 이고 다시 $f_2(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_3(x)$, 나머지가 r_2 이다. 이와 같은 방법으로 $f_n(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_{n+1}(x)$, 나머지가 r_n 이고 $f_1(x)$ 를 $(x-1)^n$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $R(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는?

① 0　　② 1

③ r_1　　④ $r_1+r_2+\cdots\cdots+r_n$

⑤ $r_1r_2\cdots\cdots r_n$

해설

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= (x-1)f_2(x)+r_1 \\
&= (x-1)\{(x-1)f_3(x)+r_2\}+r_1 \\
&= (x-1)^2f_3(x)+r_2(x-1)+r_1 \\
&= (x-1)^2\{(x-1)f_4(x)+r_3\}+r_2(x-1)+r_1 \\
&= (x-1)^3f_4(x)+r_3(x-1)^2+r_2(x-1)+r_1 \\
&\quad\vdots \\
&= (x-1)^nf_{n+1}(x)+r_n(x-1)^{n-1}+r_{n-1}(x-1)^{n-2}+\cdots\cdots \\
&\qquad +r_2(x-1)+r_1
\end{aligned}$$

$R(x)=r_n(x-1)^{n-1}+\cdots\cdots+r_2(x-1)+r_1$

$\therefore\ R(2)=r_n+r_{n-1}+\cdots\cdots+r_2+r_1$

18. 함수 $f(n) = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ 으로 정의할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2007)$ 을 10 으로 나눈 나머지는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2007)$ 의 일의 자리만 보면 된다.
$f(5)$ 이후부터는 10 으로 나누어떨어지므로
10 으로 나누어떨어지지 않는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 까지 더하면
$1 + 2 + 6 + 24 = 33$
따라서 $f(1) + f(2) + \cdots + f(2007)$ 을 10 으로 나눈 나머지는 3 이다.

19. 두 다항식 $x^3+x^2+x+3+m$, x^2-x+m이 서로소가 아닐 때, 상수 m의 값을 구하면?

① $-1,\ 2$ ② $-2,\ 3$ ③ $-1,\ 2$ ④ $-1,\ 3$ ⑤ $-2,\ 2$

해설

서로소가 아니라는 것은 일차이상의 공약수가 존재한다는 뜻이다.

$f(x)=x^3+x^2+x+3+m\cdots$㉠

$g(x)=x^2-x+m\cdots$㉡

으로 놓으면

$f(x)-g(x)=x^3+2x+3=(x+1)(x^2-x+3)$

㉠과 ㉡이 서로소가 아니므로 ㉠과 ㉡의 최대공약수는

$x+1$ 또는 x^2-x+3이다.

(i) $x+1$이 최대공약수일 때, $m=-2$

(ii) x^2-x+3이 최대공약수일 때, 이 식과 $g(x)$는 서로 같아야 하므로 $m=3$

(i), (ii)에서 $m=-2$ 또는 3