

1. 다항식 $2xy^2 + x^2y - 3x + x^3 - 1$ 에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① x 에 대한 삼차식이다.
- ② y 에 대한 이차식이다.
- ③ x^2 의 계수는 y 이다.
- ④ x 의 계수는 $2y^2 - 3$ 이다.
- ⑤ y 에 대한 상수항은 -1 이다.

해설

⑤ y 에 대한 상수항: $x^3 - 3x - 1$

2. 두 다항식 $A = 5x^3 + x^2 - 6x + 7$, $B = 2x^3 - 4x^2 - 1$ 에 대하여 $2A - 3B$ 를 계산한 식에서 x^2 의 계수는 얼마인가?

① 14 ② -12 ③ 4 ④ 17 ⑤ 18

해설

$$\begin{aligned} 2A - 3B &= 2(5x^3 + x^2 - 6x + 7) - 3(2x^3 - 4x^2 - 1) \\ &= 4x^3 + 14x^2 - 12x + 17 \end{aligned}$$

$\therefore x^2$ 의 계수 : 14

해설

이차항만 뽑아서 계산한다.

$$2A - 3B \Rightarrow 2(x^2) - 3(-4x^2) = 2x^2 + 12x^2 = 14x^2$$

3. $x^2y(-xy)^3$ 을 간단히 하면?

- ① $-x^4y^5$ ② xy^5 ③ $-x^5y^4$ ④ $-xy^5$ ⑤ x^2y^5

해설

$$x^2y(-xy)^3 = x^2y(-x^3y^3) = -x^5y^4$$

4. $(x - 2y - 3z)^2$ 을 전개하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면?

① $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 12yz - 6zx$

② $x^2 - 4xy + 4y^2 - 9z^2 + 12yz - 6zx$

③ $x^2 - (4y + 6z)x + 4y^2 + 12yz + 9z^2$

④ $4y^2 + 12yz + 9z^2 + (-4y - 6z)x + x^2$

⑤ $9z^2 + 4y^2 + x^2$

해설

$$(x - 2y - 3z)^2 = x^2 - (4y + 6z)x + 4y^2 + 12yz + 9z^2$$

5. x 에 대한 항등식 $a(x+1)+b(x-1)=x+3$ 에서 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

▷ 정답 : $b=-1$

해설

준식을 정리하면

$$(a+b)x+a-b=x+3$$

계수비교법에 의하여

$$a+b=1, a-b=3$$

연립하여 풀면

$$\therefore a=2, b=-1$$

6. 등식 $2x^2 + 10x - 18 = a(x-2)(x+3) + bx(x-2) + cx(x+3)$ 이 x 에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c 의 값을 정할 때, $a - b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면,
 $-18 = -6a \quad \therefore a = 3$
양변에 $x = 2$ 를 대입하면
 $10 = 10c \quad \therefore c = 1$
양변에 $x = -3$ 을 대입하면,
 $-30 = 15b, \quad \therefore b = -2$
 $\therefore a - b + c = 3 + 2 + 1 = 6$

7. 다항식 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, 나머지는?

- ① $f(2)$ ② $f(-2)$ ③ $f(2) + Q(2)$
④ $Q(2)$ ⑤ $Q(-2)$

해설

$$f(x) = (x-2)Q(x) + R$$

$$\therefore f(2) = R$$

8. 다항식 $f(x) = x^3 + 3x^2 + kx - k$ 가 $x + 1$ 로 나누어떨어지도록 상수 k 의 값을 정하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

즉, $f(-1) = 0$ 이므로
 $f(-1) = -1 + 3 - k - k = 0, \therefore k = 1$

9. $3x^4 - x^2 - 2$ 를 인수분해 하여라.

① $(3x^2 - 2)(x + 1)(x - 1)$

② $(3x^2 + 2)(x - 1)(x - 1)$

③ $(3x^2 + 2)(x + 1)(x + 1)$

④ $(3x^2 + 3)(x + 1)(x - 1)$

⑤ $(3x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)$

해설

$A = x^2$ 로 치환하면

$$(\text{준식}) = 3A^2 - A - 2$$

$$= (3A + 2)(A - 1)$$

$$= (3x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)$$

10. 두 다항식 $x^2 + ax - 2$, $x^2 + 3x + b$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, 두 실수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

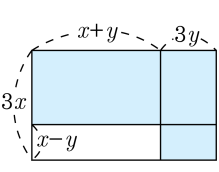
해설

최대공약수가 $x - 1$ 이므로 각각의 식에 $x = 1$ 을 대입하면 0이 된다.

$$\therefore 1 + a - 2 = 0, 1 + 3 + b = 0 \text{에서 } a = 1, b = -4$$

$$\therefore a + b = -3$$

11. 다음 그림의 직사각형에서 색칠한 부분의 넓이를 나타내는 식을 세워 전개하였을 때, y^2 항의 계수는?



- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} & (x+4y)(3x) - (x+y)(x-y) \\ &= 3x^2 + 12xy - x^2 + y^2 \\ &= 2x^2 + 12xy + y^2 \end{aligned}$$

12. $(x^3 + ax + 2)(x^2 + bx + 2)$ 를 전개했을 때, x^2 과 x^3 의 계수를 모두 0이 되게 하는 상수 a , b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$$\begin{aligned} & (x^3 + ax + 2)(x^2 + bx + 2) \\ &= x^5 + bx^4 + (a + 2)x^3 + (ab + 2)x^2 + (2a + 2b)x + 4 \\ & (x^2 \text{의 계수}) = (x^3 \text{의 계수}) = 0 \text{ 이므로} \\ & ab + 2 = 0, \quad a + 2 = 0 \\ & \text{따라서 } a = -2, \quad b = 1 \\ & \therefore a + b = -1 \end{aligned}$$

13. $\frac{x+1}{3} = y-2$ 를 만족하는 모든 실수 x, y 에 대하여, 항상 $ax+by=7$ 이 성립할 때, a, b 의 값을 구하여라. (a, b 는 상수)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

▷ 정답 : $b = 3$

해설

$$\frac{x+1}{3} = y-2, x+1 = 3(y-2)$$

$$x-3y = -7$$

$$-x+3y = 7 \Leftrightarrow ax+by = 7$$

$$\therefore a = -1, b = 3$$

14. 다음 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy 의 값을 구하여라.

$$(2k + 3)x + (3k - 1)y + 5k - 9 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

k 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(2x + 3y + 5)k + (3x - y - 9) = 0$$

이것은 k 에 대한 항등식이므로

$$2x + 3y + 5 = 0$$

$$3x - y - 9 = 0$$

연립방정식을 풀면 $x = 2$, $y = -3$

$$\therefore xy = 2 \times (-3) = -6$$

15. $(x+y)a - (x-y)b - (y-z)c - 4z = 0$ 이 x, y, z 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 곱 abc 를 구하면?

① 4

② 8

③ 16

④ 32

⑤ 64

해설

x, y, z 에 대해 정리하면

$$(a-b)x + (a+b-c)y + (c-4)z = 0$$

x, y, z 에 대한 항등식이므로

$$a = b, a + b - c = 0, c = 4$$

$$\therefore a = b = 2, c = 4$$

$$\therefore abc = 16$$

16. 다항식 x^3+ax-8 을 x^2+4x+b 로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$ 가 되도록 상수 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8 을 x^2+4x+b 로 직접나눈 나머지는

$$(a-b+16)x+4b-8$$

$$(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots\textcircled{㉠}$$

㉠이 x 에 대한 항등식이므로,

$$a-b+16=3, 4b-8=4$$

$$\therefore a=-10, b=3$$

$$\therefore a+b=-7$$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$ 의 양변의 계수를

비교하여 $a=-10, b=3, p=-4$ 를 구해도 된다.

17. $f(x) = 3x^3 + px^2 + qx + 12$ 가 $x + 2$ 로도 나누어떨어지고, $x - 1$ 로도 나누어떨어질 때, $\frac{q}{p}$ 의 값은?

- ① 9 ② 4 ③ -9 ④ -3 ⑤ -12

해설

$$f(-2) = -24 + 4p - 2q + 12 = 0$$

$$f(1) = 3 + p + q + 12 = 0$$

$$p = -3, q = -12, \frac{q}{p} = \frac{-12}{-3} = 4$$

18. 등식 $3x^2 + 2x + 1 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

- ① 3
- ② -4
- ③ 2
- ④ 8
- ⑤ 6

해설

$$3x^2 + 2x + 1 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$$
$$= (x - 1) \{ a(x - 1) + b \} + c$$

1		3	2	1	
			3	5	
1		3	5	6	← c
			3		
		3	8		← c
		↑			
		a			

해설

$x = 1$ 을 대입하면 $c = 6$

$$3x^2 + 2x + 1 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + 6$$
$$\rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = a(x - 1)^2 + b(x - 1)$$
$$\rightarrow (x - 1)(3x + 5) = a(x - 1)^2 + b(x - 1)$$

→ 양변을 $x - 1$ 로 나누면

$$3x + 5 = a(x - 1) + b = ax - a + b$$

∴ $a = 3, b = 8$

※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

19. 다항식 $8x^3 - 1$ 을 $4x^2 + 2x + 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때 $Q(x)$ 의 상수항의 계수는?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

$$\therefore Q(x) = 2x - 1$$

$$\therefore \text{상수항은 } -1$$

20. $\frac{k}{3}(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)$ 와 같은 것은?

① $\frac{1}{6}(k+1)(k+3)(k+4)$

② $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$

③ $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

④ $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)(k+3)$

⑤ $\frac{1}{4}(k+1)(2k+1)(3k+2)$

해설

$$(k+1)(k+2) = \frac{3}{3}(k+1)(k+2) \text{ 이므로}$$

공통인수 $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)$ 로 묶으면

$$(\text{준 식}) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$

21. $(a - b + c)(a + b - c)$ 를 전개한 식은?

① $a^2 + b^2 + c^2 - 2bc$

② $a^2 - b^2 + c^2 - 2bc$

③ $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$

④ $a^2 + b^2 - c^2 - 2bc$

⑤ $a^2 + b^2 + c^2 + 2bc$

해설

$$\begin{aligned} & (a - b + c)(a + b - c) \\ &= \{a - (b - c)\}\{a + (b - c)\} \\ &= a^2 - (b - c)^2 \\ &= a^2 - b^2 - c^2 + 2bc \end{aligned}$$

22. 다음 중 다항식 $x^4 - 8x^2 - 9$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x - 3$

② $x + 3$

③ $x^2 + 1$

④ $x^2 + 9$

⑤ $x^3 + 3x^2 + x + 3$

해설

준 식을 인수분해 하면

$$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 + 1)(x^2 - 9)$$

$$= (x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$$

$$\textcircled{5} \quad x^2(x + 3) + x + 3 = (x^2 + 1)(x + 3)$$

23. $x^4 + 4x^3 - 2x^2 + ax + b$ 가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b 의 값은?
- ① $a = 12, b = 9$ ② $a = -12, b = 9$
③ $a = 12, b = -9$ ④ $a = -12, b = -9$
⑤ $a = 9, b = 12$

해설

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 + ax + b = (x^2 + px + q)^2 \text{으로 놓으면}$$

이 식의 우변은

$$x^4 + 2x^2(px + q) + (px + q)^2$$
$$= x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2$$

좌변과 계수를 비교하면

$$2p = 4, \quad p^2 + 2q = -2$$
$$p = 2, \quad q = -3 \text{에서}$$
$$a = 2pq = -12, \quad b = q^2 = 9$$

24. $x^2 - 2x - y^2 + 2y$ 를 인수분해 하였더니 $(x + ay)(x - by + c)$ 가 된다고 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x - y^2 + 2y \\ &= (x^2 - y^2) - 2(x - y) \\ &= (x + y - 2)(x - y) \\ &= (x + ay)(x - by + c) \end{aligned}$$

계수를 비교하면

$$a = -1, b = -1, c = -2$$
$$\therefore a + b + c = -1 - 1 - 2 = -4$$

25. 등식 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x + a)(x + b)(x + c)$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

조립제법을 사용한다

1	1	4	1	-6
		1	5	6
-2	1	5	6	0
		-2	-6	
-3	1	3	0	
		-3		
	1	0		

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$
 $\therefore a + b + c = 4$

26. $x^3 - 4x^2 + x + 6$ 을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 이다. $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ 이라 놓으면,
 $x = -1$ 일 때, $-1 - 4 - 1 + 6 = 0$
따라서, $f(x)$ 는 $(x+1)$ 로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$ 는 $(x+1)$ 의 인수를 갖는다.
즉, $f(x) = (x+1)Q(x)$ 몫
 $Q(x)$ 는 조립제법으로 구한다.

-1		1	-4	1	6
			-1	5	-6
		1	-5	6	0

$f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x+1)$
 $\therefore f(x) = (x-3)(x-2)(x+1)$
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 14$

27. 다음 세 다항식에서 최대공약수를 구하면?

$2x^2 - 3x + 1, \quad 3x^2 - x - 2, \quad x^2 + 3x - 4$

- ① $x - 1$

② $2x - 1$

③ $x - 2$

④ $x + 3$

⑤ $x + 1$

해설

$2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1)$ $3x^2 - x - 2 = (3x + 2)(x - 1)$ $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$ 따라서 최대 공약수는 $x - 1$ 이다.

28. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$ 를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x + (x+3)\times 2 \\ &= (x^2+3x) + (2x+6) \\ &= x^2 + (3x+2x) + 6 \\ &= x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

- ① 교환법칙, 결합법칙
- ② 교환법칙, 분배법칙
- ③ 분배법칙, 결합법칙
- ④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙
- ⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x + (x+3)\times 2 \text{ (분배)} \\ &= (x^2+3x) + (2x+6) \text{ (분배)} \\ &= x^2 + (3x+2x) + 6 \text{ (결합)} \\ &= x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

29. 다음 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (\text{}x^2 + \text{}x + \text{}) = x + 2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 +$ $x +$ $= A$ 라 하면
 $(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div A = x + 2$
 $\therefore A = (x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (x + 2)$
 $\therefore A = x^2 + 2x - 1$ 이므로
 안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, -1 이다.

30. $P = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$ 의 값을 구하면?

- ① $2^{32} - 1$
- ② $2^{32} + 1$
- ③ $2^{31} - 1$
- ④ $2^{31} + 1$
- ⑤ $2^{17} - 1$

해설

주어진 식에 $(2 - 1) = 1$ 을 곱해도 식은 성립하므로

$$\begin{aligned} P &= (2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \\ &= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \\ &= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \\ &= \vdots \\ &= (2^{16} - 1)(2^{16} + 1) \\ &= 2^{32} - 1 \end{aligned}$$

31. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$x^2 - x + 1 = 0$, 양변에 $x + 1$ 을 곱하면,

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$x^3 + 1 = 0, x^3 = -1 \text{ 에서 } x^5 = x^3 \times x^2 = -x^2$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \dots\dots ①$$

$x^2 - x + 1 = 0$ 를 x 로 나누어 정리한다.

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = -1$$

$$① \text{ 에 대입하면, } x^5 + \frac{1}{x^5} = 1$$

32. 다항식 $f(x)$ 에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ 일 때, $f(x)$ 를 $(2x-1)(3x-1)$ 로 나눈 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12x-3$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$ 라 하면

$$f(x) = (2x-1)(3x-1)Q(x) + ax + b$$

$x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$ 을 각각 양변에 대입하면

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a + b = 3, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}a + b = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $\frac{1}{6}a = 2 \Rightarrow a = 12, b = -3$

∴ 구하는 나머지는 $12x-3$

33. 다항식 $f(x)$ 를 $2x - 1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x + 2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x + 2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$$f(x) = (2x - 1)Q(x) - 4 \text{ 라 하면}$$

$$f(-2) = -5Q(-2) - 4$$

$$\text{그런데 } Q(-2) = 2 \text{ 이므로 } f(-2) = -14$$

34. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b 를 $x-1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

k	1	a	-1	b
		c	d	a
	1	4	3	5

- ① $a=3$
- ② $b=2$
- ③ $c=1$
- ④ $d=4$
- ⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

1	1	a	-1	b
		1	$a+1$	a
	1	$a+1$	a	$b+a$

$k=1, a=3, b=2, c=1, d=4$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

35. $ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$ 을 인수분해하면?

- ① $-(a-b)(b-c)(c-a)$ ② $-(a+b+c)(a-b-c)$
③ $-(a+b)(b+c)(c+a)$ ④ $(a+b)(b+c)(c+a)$
⑤ $(a-b)(b-c)(c-a)$

해설

전개하여 a 에 대한 내림차순으로 정리한 후, 인수분해 한다.

$$\begin{aligned} & ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) \\ &= (b-c)a^2 - (b^2-c^2)a + bc(b-c) \\ &= (b-c)a^2 - (b+c)(b-c)a + bc(b-c) \\ &= (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\} \\ &= (b-c)(a-b)(a-c) \\ &= -(a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

36. $x = 1001$ 일 때, $\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

37. $x^4 + 2x^2 + 9 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ 로 인수분해될 때, $|ab - cd|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2 + 3)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)\end{aligned}$$

여기서 계수를 비교하면

$$a = 2, b = 3, c = -2, d = 3$$

$$\therefore |ab - cd| = |2 \times 3 - (-2) \times 3| = 12$$

38. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식 A, B 의 최대공약수가 $x+2$ 이고 최소공배수가 x^3+x^2-4x-4 이다. $A+B=ax^2+bx+c$ 를 만족하는 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3+x^2-4x-4=(x+2)(x+1)(x-2)$
두 다항식은 각각 $(x+2)(x+1), (x+2)(x-2)$
 $A+B=(x+2)(x-2)+(x+2)(x+1)$
 $=2x^2+3x-2=ax^2+bx+c$
 $\therefore a=2, b=3, c=-2$
 $\therefore a+b+c=3$

39. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2 - 5x - 3$ 이고 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 일 때, 두 다항식의 최대공약수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x - 3$

해설

두 다항식을 A, B 라고 하면
 $A + B = (a + b)G, L = abG,$
즉, 최대공약수는 두 식의 합과 최소공배수의 공약수이다.
 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 1)(x + 2)$
 $2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$
 $\therefore G = x - 3$

40. 자연수 a, b 의 최대공약수를 (a, b) 로 나타낼 때, 다음과 같은 성질이 알려져 있다.

a 를 b 로 나누었을 때 몫을 q , 나머지를 r 라고 하면 $a = bq + r$ ($0 \leq r < b$)이고,
이 때, $(a, b) = (b, r)$ 가 성립한다.

다음은 위의 성질을 이용하여 1996 과 240 의 최대공약수를 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것은?

$(1996, 240) = (240, (가)) = ((가), 12) = (12, (나)) = (나)$

- ① (가)= 74, (나)= 2
- ② (가)= 72, (나)= 6
- ③ (가)= 78, (나)= 2
- ④ (가)= 76, (나)= 6
- ⑤ (가)= 76, (나)= 4

해설

$1996 = 240 \cdot 8 + 76, 240 = 76 \cdot 3 + 12$
 $76 = 12 \cdot 6 + 4$ 이므로
 $(1996, 240) = (240, 76) = (76, 12) = (12, 4) = 4$

41. $x^2 + x - 1 = 0$ 일 때, $x^5 - 5x$ 의 값을 구하면?

① 2

② 1

③ 0

④ -1

⑤ -3

해설

$x^5 - 5x$ 를 $x^2 + x - 1$ 로 나누면
즉, $x^5 - 5x = (x^2 + x - 1) \times \text{몫} - 3$
 $x^2 + x - 1 = 0$
 $\therefore x^5 - 5x = -3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.

$$\begin{aligned}x^2 &= -x + 1 \\x^5 - 5x &= (x^2)^2 \times x - 5x \\&= x(-x + 1)^2 - 5x \\&= x^3 - 2x^2 - 4x \\&= x(-x + 1) - 2(-x + 1) - 4x \\&= -x^2 - x - 2 \\&= -(x^2 + x) - 2 \\&= -1 - 2 = -3\end{aligned}$$

42. $\frac{2005^3 + 1}{2005 \times 2004 + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

2005 = x 로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{x^3 + 1^3}{x(x-1) + 1} \\&= \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} \\&= x + 1 \\&= 2006\end{aligned}$$

43. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14 (x > 0)$ 일 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값은?

① 36

② 44

③ 52

④ 68

⑤ 82

해설

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 \circ \text{므로}$$

$$x + \frac{1}{x} = 4 \quad (\because x > 0)$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) = 52$$

44. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 모든 모서리의 길이의 합이 20m이고 대각선의 길이가 3m일 때, 이 상자의 겉넓이는 몇 m²인가?

① 12m² ② 13m² ③ 14m² ④ 15m² ⑤ 16m²

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c 라 하면

$$4(a + b + c) = 20, a + b + c = 5$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3, a^2 + b^2 + c^2 = 9$$

$$\begin{aligned} \text{(겉넓이)} &= 2(ab + bc + ca) \\ &= (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 25 - 9 = 16(\text{m}^2) \end{aligned}$$

45. $(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때,

$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2^{24} ④ 2^{25} ⑤ 2^{50}

해설

$$(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$$

$x = 1$ 을 양변에 대입하면

$$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots \textcircled{1}$$

$x = -1$ 을 양변에 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$$

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50} = 0$$

46. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4$ 로 나눈 나머지는 $2x + 1$ 이고, $g(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눈 나머지는 $x - 4$ 이다. 이 때, $(x + 2)f(x) + 3g(x + 1)$ 을 $x - 2$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① 7 ② 9 ③ 13 ④ 17 ⑤ 23

해설

$f(x) = (x^2 - 4)p(x) + 2x + 1$ 에서 $f(2) = 5$
 $g(x) = (x^2 - 5x + 6)q(x) + x - 4$ 에서 $g(3) = -1$
 $h(x) = (x + 2)f(x) + 3g(x + 1)$ 이라 놓으면,
 $h(x)$ 를 $x - 2$ 로 나눈 나머지는
 $h(2) = 4f(2) + 3g(3) = 17$

47. 1000^{10} 을 1001로 나눌 때 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R 라 할 때, 다음 중 나머지 R 를 구하기 위한 가장 적절한 식은?

① $x^{10} = xQ(x) + R$

② $x^{10} = (x - 1)Q(x) + R$

③ $x^{10} = (x + 1)Q(x) + R$

④ $x^{10} = (x - 1)^{10}Q(x) + R$

⑤ $x^{10} = (x + 1)Q(x) + R + 1$

해설

$1000^{10} = 1001 \cdot Q(x) + R$ 에서 $1000 = x$ 라 하면

$$x^{10} = (x + 1)Q(x) + R$$

$x = -1$ 을 대입하면 $R = 1$ 을 구할 수 있다.

48. $a + b + c = 0$ 일 때, $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 의 값을 구하면?

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} a + b + c = 0 \text{ 이면 } a^3 + b^3 + c^3 &= 3abc \text{ 이다.} \\ (\text{준식}) &= \frac{a(b+c)}{bc} + \frac{b(a+c)}{ac} + \frac{c(a+b)}{ab} \\ &= \frac{a^2(-a) + b^2(-b) + c^2(-c)}{abc} \\ &= \frac{-(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} \\ &= \frac{-3abc}{abc} = -3 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} &a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \\ &= \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) \\ &= \frac{a+c}{b} + \frac{b+a}{c} + \frac{b+c}{a} \\ &= \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c} + \frac{-a}{a} \quad (\because a+b+c=0) \\ &= -3 \end{aligned}$$

49. 삼각형의 세변의 길이를 x, y, z 라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$

- ① x 가 빗변인 직각삼각형
- ② y 가 빗변인 직각삼각형
- ③ z 가 빗변인 직각삼각형
- ④ $x = y$ 인 이등변삼각형
- ⑤ $x = y, z$ 가 빗변인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned} &(x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z \\ &= \{x^2(x + y) + (x + y)z^2 - (x + y)y^2\}z \\ &= (x + y)(x^2 + z^2 - y^2)z \\ &\therefore (x + y)(x^2 + z^2 - y^2)z = 0 \\ &x^2 + z^2 - y^2 = 0 \quad (\because x, y, z \text{는 모두 양수}) \\ &\therefore x^2 + z^2 = y^2 \Rightarrow y \text{가 빗변인 직각삼각형} \end{aligned}$$

50. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots + 99^2$ 을 계산하여라.

- ① 99
- ② 100
- ③ 4950
- ④ 5050
- ⑤ 10000

해설

$$\begin{aligned} &1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots + 99^2 \\ &= 99^2 - 98^2 + 97^2 - 96^2 + \cdots + 3^2 - 2^2 + 1^2 \\ &= (99^2 - 98^2) + (97^2 - 96^2) + \cdots + (3^2 - 2^2) + 1^2 \\ &= (99 - 98)(99 + 98) + (97 - 96)(97 + 96) + \cdots + (3 - 2)(3 + 2) + 1 \\ &= (99 + 98) + (97 + 96) + \cdots + (3 + 2) + 1 \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 \\ &= (1 + 99) + (2 + 98) + \cdots + (49 + 51) + 50 \\ &= 4950 \end{aligned}$$