1. 두 다항식 $A = 3x - y + 1$, $B = -x + 2y - 2$에 대하여 $A - B$의 계산결과로 맞는 식은?

① $2x - 3y - 1$　② $4x + y - 1$　③ $2x + 3y + 3$

④ $4x - 3y + 3$　⑤ $2x + y - 1$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= (3x - y + 1) - (-x + 2y - 2) \\ &= 3x - y + 1 + x - 2y + 2 \\ &= 4x - 3y + 3 \end{aligned}$$

2. 다항식 $2x^3+x^2-5x+3$을 x^2+x-1로 나눌 때, 몫과 나머지의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

직접 나누어 보면
$\therefore$몫 : $2x-1$, 나머지 : $-2x+2$
몫과 나머지의 합은 1

3. 다항식 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 을 전개하면?

① a^2-b^2 ② a^3-b^3

③ a^3+b^3 ④ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

⑤ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

해설

공식 : $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

4. 다항식 $(5x^2+3x+1)^2$ 을 전개하였을 때, x^2 의 계수는?

① 10 ② 13 ③ 16 ④ 19 ⑤ 25

해설

$(5x^2+3x+1)(5x^2+3x+1)$ 에서
ⅰ) (일차항)×(일차항) 의 경우 $9x^2$
ⅱ) (이차항)×(상수항) 의 경우 $2\times 5x^2$
즉, $5x^2+5x^2+9x^2=19x^2$
$\therefore$ 19

5. $x-y=1$을 만족하는 모든 실수 x, y에 대하여 등식 $3x^2-5x+1=ay^2+by+c$이 항상 성립할 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x=y+1$을 주어진 식에 대입한 후,
y에 대한 내림차순으로 정리한다.
$3(y+1)^2-5(y+1)+1=ay^2+by+c$
$(3-a)y^2+(1-b)y-1-c=0$
$\therefore a=3,\ b=1,\ c=-1$
$\therefore\ a+b+c=3$

6. x 의 값에 관계없이 등식 $x^2+13x-18=a(x+2)(x-3)+bx(x+2)+cx(x-3)$ 이 항상 성립할 때, 상수 a,b,c 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

해설

준식에
$x=0$을 대입하면 $-18=-6a$에서 $a=3$
$x=3$을 대입하면 $30=15b$에서 $b=2$
$x=-2$을 대입하면 $-40=10c$에서 $c=-4$
$\therefore\ a+b+c=3+2+(-4)=1$

7. 임의의 실수 x, y에 대하여, $(x+y)a^2+(x-y)b=4x+y$가 성립할 때, a^2+b^2의 값은?

① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ $\frac{17}{4}$ ④ $\frac{19}{4}$ ⑤ $\frac{21}{4}$

해설

$(a^2+b)x+(a^2-b)y=4x+y$

$a^2+b=4\cdots①$, $a^2-b=1\cdots②$

①, ②에서 $a^2=\frac{5}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

$\therefore\ a^2+b^2=\frac{19}{4}$

8. $(x+1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ 의 값을 구하면?

① 8 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 128

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면,
$(1+1)^5 = a_0 + a_1 + \cdots + a_5$ 이므로
$\therefore\ 2^5 = 32$

9. 다항식 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$를 일차식 $x + 1$로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① -10 ② 10 ③ -4 ④ 4 ⑤ 0

해설

$f(x) = (x+1)Q(x) + R$이라고 놓으면
$f(-1) = R$
$\therefore\ f(-1) = -1 - 2 - 3 - 4 = -10$
따라서 $R = -10$

10. $x^4 - 6x^2 + 8$를 인수분해하면? (단, 유리수 범위에서 인수분해 하여라.)

① $(x^2-2)(x^2-4)$

② $(x^2-2)(x-4)(x+4)$

③ $(x^2-2)(x-2)(x+2)$

④ $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-2)(x+2)$

⑤ $(x^2-\sqrt{2})(x-2)(x+2)$

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 6x^2 + 8 &= (x^2)^2 - 6x^2 + 8 \\ &= (x^2-2)(x^2-4) \\ &= (x+2)(x-2)(x^2-2) \end{aligned}$$

해설

인수정리를 이용할 수 있다.
$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$
$f(2) = 0, \quad f(-2) = 0,$
즉, $(x-2)(x+2)$로 나누어 떨어지므로
조립제법을 써서 인수분해하면 된다.

11. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

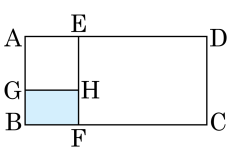
> ㉠ 내림차순으로 정리하면
> $3yx^3+(9y-z)x+5y-4$ 이다.
> ㉡ 오름차순으로 정리하면
> $5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다.
> ㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다.
> ㉣ x^3 의 계수는 3이다.
> ㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢ ② ㉠, ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

12. 다음 그림의 사각형 AGHE, 사각형 EFCD는 정사각형이고, $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = b$ 일때, 사각형 GBFH의 넓이는?



① $a^2 - 2ab - b^2$ ② $a^2 + 3b^2 - 2ab$

③ $-a^2 + 3ab - 2b^2$ ④ $-a^2 + 3ab - b^2$

⑤ $-a^2 + 2ab - b^2$

해설

$\square GBFH = \square ABCD - \square AGHE - \square EFCD$

$= ab - (a-b)^2 - b^2 = ab - (a^2 - 2ab + b^2) - b^2$

$= -a^2 + 3ab - 2b^2$

13. $(x+y)^n$을 전개할 때 항의 개수는 $n+1$개이다. 다항식 $\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$을 전개할 때, 항의 개수를 구하면 ?

① 7개 ② 8개 ③ 12개 ④ 13개 ⑤ 64개

해설

$\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$
$=\{(4a^2-9b^2)^3\}^4$
$=(4a^2-9b^2)^{12}$
$\therefore$ $(4a^2-9b^2)^{12}$의 항의 개수는 13개이다.

14. 등식 $2x^2-3x-2=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$이 x에 관한 항등식이 되도록 할 때, $2ab$의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 2 ⑤ 4

해설

양변에 $x=0$을 대입하면, $-2=2a$ $\therefore\ a=-1$
양변에 $x=1$을 대입하면, $-3=-b$ $\therefore\ b=3$
$\therefore\ 2ab=-6$

15. 다음 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy의 값을 구하여라.

$$(2k+3)x+(3k-1)y+5k-9=0$$

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

k에 대하여 내림차순으로 정리하면
$(2x+3y+5)k+(3x-y-9)=0$
이것은 k에 대한 항등식이므로
$2x+3y+5=0$
$3x-y-9=0$
연립방정식을 풀면 $x=2,\ y=-3$
$\therefore\ xy=2\times(-3)=-6$

16. 다항식 x^3+ax+b가 다항식 x^2-x+1로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
$x^2=x-1$을 대입하면
$ax+(b-1)=0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로,
$a=0,\ b-1=0$
$\therefore\ a=0,\ b=1$
$\therefore a+b=1$

해설

x^3+ax+b
$=(x^2-x+1)Q(x)$
$=(x^2-x+1)(x+b)$
$\therefore\ b=1,\ a=0$

17. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

나머지 정리를 이용한다.
주어진 식에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면,
$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots$㉠
$(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하면,
$m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{13}{3}$
$\therefore\ m-n=5$

18. $f(x) = 3x^3 + px^2 + qx + 12$ 가 $x+2$ 로도 나누어떨어지고, $x-1$ 로도 나누어떨어질 때, $\dfrac{q}{p}$ 의 값은?

① 9 ② 4 ③ −9 ④ −3 ⑤ −12

해설

$f(-2) = -24 + 4p - 2q + 12 = 0$
$f(1) = 3 + p + q + 12 = 0$
$p = -3,\ q = -12,\ \dfrac{q}{p} = \dfrac{-12}{-3} = 4$

19. 다항식 $2x^3+ax^2+bx+3$ 이 다항식 $2x^2-x-3$ 으로 나누어 떨어질 때, $a+b$ 의 값은 ?

① 3 ② 1 ③ -1 ④ -2 ⑤ -5

해설

$2x^3+ax^2+bx+3=(2x^2-x-3)Q(x)$

$=(x+1)(2x-3)Q(x)$

$x=-1$ 일 때, $-2+a-b+3=0$

$\therefore\ a-b=-1\cdots$ ㉠

$x=\frac{3}{2}$ 일 때, $\frac{27}{4}+\frac{9}{4}a+\frac{3}{2}b+3=0$

$27+9a+6b+12=0$

$\therefore\ 3a+2b=-13\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서 $a=-3,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=(-3)+(-2)=-5$

20. 다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3$을 일차식 $x - 1$로 나누어 떨어지도록 a의 값을 정하면?

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

해설

$f(1) = 1 + a + 3 = 0$, $a = -4$

21. 등식 $3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

① 3 ② -4 ③ 2 ④ 8 ⑤ 6

해설

$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

$=(x-1)\{a(x-1)+b\}+c$

1	3	2		1	
		3		5	
1	3	5		6	← c
		3			
	3	8	← c		
	↑				
	a				

해설

$x=1$ 을 대입하면 $c=6$

$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+6$

$\rightarrow 3x^2+2x-5=a(x-1)^2+b(x-1)$

$\rightarrow (x-1)(3x+5)=a(x-1)^2+b(x-1)$

→ 양변을 $x-1$ 로 나누면

$3x+5=a(x-1)+b=ax-a+b$

$\therefore\ a=3,\ b=8$

※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

22. 다항식 $8x^3-1$을 $4x^2+2x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때 $Q(x)$의 상수항의 계수는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$8x^3-1=(2x)^3-1^3=(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)$

$\therefore Q(x)=2x-1$

$\therefore$ 상수항은 -1

23. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해하였더니, $(x+ay)(x-by+c)$가 되었다. 이 때, a, b, c를 순서대로 쓴 것은?

① $-1,\ 0,\ 1$　② $-1,\ 1,\ 2$　③ $-2,\ -1,\ 1$

④ $-1,\ -1,\ -2$　⑤ $-1,\ 2$

해설

$$\begin{aligned} x^2-2x-y^2+2y &= (x+y)(x-y)-2(x-y) \\ &= (x-y)(x+y-2) \end{aligned}$$

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ c=-2$

24. $(x^4 - 8x^2 - 9) \div (x^2 - 9)$를 계산하여라.

① $x^2 + 1$　② $x^2 - 1$　③ $x^2 + 2$
④ $x^2 - 2$　⑤ $x^2 + 3$

해설

$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 - 9)(x^2 + 1)$
$\therefore$ (준식)$= x^2 + 1$

25. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌 변}) &= (x^2+2)^2 - x^2 \\ &= (x^2+x+2)(x^2-x+2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a = -1,\ b = 2$

$\therefore ab = -1 \times 2 = -2$

26. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 놓으면,
$x=-1$일 때, $-1-4-1+6=0$
따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.
즉, $f(x)=(x+1)Q(x)$꼴
$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

-1	1	-4	1	6
		-1	5	-6
	1	-5	6	0

$f(x)=(x^2-5x+6)(x+1)$
$\therefore\ f(x)=(x-3)(x-2)(x+1)$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(-3)^2+(-2)^2+1^2=14$

27. 두 다항식 x^3+1, x^3+2x^2-5x-6의 최대공약수를 구하면?

① x ② $x+1$ ③ $x+2$ ④ $x-1$ ⑤ $x-2$

해설

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$
$x^3+2x^2-5x-6=(x-2)(x+1)(x+3)$
따라서 최대공약수는 $x+1$

28. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$일 때, $2A + B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라.

$$
\begin{aligned}
2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\
&= (2a + 4b) + (2a + 3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\
&= 2a + (4b + 2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\
&= 2a + (2a + 4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\
&= (2a + 2a) + (4b + 3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\
&= (2 + 2)a + (4 + 3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\
&= 4a + 7b
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙

29. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+2 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지가 $x+3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-6$

해설

검산식을 사용

$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)\cdot A+(x+3)$

$A=(x+p)$

$x^3+ax^2+bx+2-(x+3)=(x^2-x+1)(x+p)$

$x^3+ax^2+(b-1)x-1=(x^2-x+1)(x-1)\ \therefore p=-1$

우변을 정리하면

$\therefore\ a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

30. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 4^3-5^3　② 3^3-3^4　③ 0

④ 1　⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3=A$라 놓으면

$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$

$=(A+x^4)^3$

$=A^3+3A^2x^4+3Ax^8+x^{12}$

$=A^3+(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$

이 때 $(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$은 x^3 항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 x^3 의 계수는 같다.

$\therefore\ a-b=0$

31. $(-2x^3+x^2+ax+b)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수가 -8 일 때, $a-2b$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설

전개할 때 삼차항은 일차항과 이차항의 곱, 삼차항과 상수항의 곱이 각각 2 개씩 나온다.

$(-2x^3\times b)\times 2+(x^2\times ax)\times 2=(-4b+2a)x^3$

$2a-4b=-8$

$\therefore\ a-2b=-4$

32. 다음 중에서 겉넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$ ② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겉넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

대각선 : $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ $\therefore\ d = \sqrt{14}$

$= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

$= 6^2 - 22 = 14$

33. $f(x)$를 $x-1$로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $2x+1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q(x)+3 \\ &= (x-1)\{(x+3)Q'(x)+2\}+3 \\ &= (x-1)(x+3)Q'(x)+2(x-1)+3 \\ &= (x^2+2x-3)Q'(x)+2x+1 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

34. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\ (\text{단. } a\neq b\neq c)$$

① -1 ② 1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\ &= \frac{(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\ &= \frac{(c-b)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1\end{aligned}$$

35. 서로 다른 세 실수 x, y, z에 대하여 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 를 만족할 때, $x+y+z$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

$(x+y+z)=0$ 또는 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\therefore\ x+y+z=0$ 또는 $\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

그런데 x, y, z 가 서로 다른 세 실수$(x\neq y\neq z)$ 이므로

$x+y+z=0$

36. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

37. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식 A, B의 최대공약수가 $x+2$이고 최소공배수가 x^3+x^2-4x-4이다. $A+B=ax^2+bx+c$를 만족하는 상수 $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$x^3+x^2-4x-4=(x+2)(x+1)(x-2)$
두 다항식은 각각 $(x+2)(x+1), (x+2)(x-2)$
$A+B=(x+2)(x-2)+(x+2)(x+1)$
$=2x^2+3x-2=ax^2+bx+c$
$\therefore a=2, b=3, c=-2$
$\therefore\ a+b+c=3$

38. x^2+ax-9와 x^2+bx+c의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9이다. $a-b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$A = x^2 + ax - 9 = Gp$
$B = x^2 + bx + c = Gq$라 하면
$A + B = (p+q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x+1)(x-3)$
$L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1)$
$= (x-1)(x^2-9) = (x-1)(x+3)(x-3)$
따라서, $G = x-3$, $p = x+3$, $q = x-1$이다.
$\therefore\ A = (x+3)(x-3) = x^2 - 9$
$B = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$
$\therefore\ a = 0,\ b = -4,\ c = 3$
$\therefore\ a - b + c = 7$

39. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2 - 8$이고, 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$일 때, 두 다항식의 최대공약수는 $ax + b$이다. 이 때, $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

두 식 A, B의 최대공약수를 G라 하면
$A = Ga, B = Gb(a, b$는 서로소$)$
$A + B = (a + b)G = 2(x + 2)(x - 2)$
$L = abG = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$
$\therefore\ G = x + 2$

40. 두 다항식 A, B의 최대공약수 G를 $A \cdot B$, 최소공배수 L을 $A \bigstar B$로 나타내기로 한다. 다음 중 $(A^2 \cdot B^2) \bigstar (A^2 \cdot AB)$와 같은 것은?

① 1 ② A ③ AB ④ AL ⑤ AG

해설

$A = aG$, $B = bG$ (a, b는 서로소)라 하면

$A^2 \cdot B^2 = a^2G^2 \cdot b^2G^2 = G^2$

$A^2 \cdot AB = a^2G^2 \cdot abG^2 = aG^2$

$\therefore (A^2 \cdot B^2) \bigstar (A^2 \cdot AB) = G^2 \bigstar aG^2 = aG^2 = AG$

41. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c)+(c+a)(c-a)$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형
④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c)+(c+a)(c-a)$에서
$\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\} = b^2+2bc+c^2-a^2$
$a^2-(b-c)^2 = -a^2+b^2+c^2+2bc$
$2a^2 = 2b^2+2c^2$
$\therefore\ a^2 = b^2+c^2$
따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

42. $a+b=4$, $a^2+b^2=10$일 때, a^5+b^5의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 244

해설

$a+b=4$, $a^2+b^2=10$

$ab=\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}=3$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=28$

$\therefore\ a^5+b^5=(a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^2b^2(a+b)$

$=28\times10-9\times4$

$=244$

43. x에 대한 다항식 $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지는 $2x-7$이고, $x^2-3x-10$으로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이 다항식 $f(x)$를 x^2-6x+5로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$　② $4x+3$　③ $x-1$

④ $4x-9$　⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$를 x^2-6x+5로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$$f(x)=(x^2-6x+5)Q(x)+ax+b$$
$$=(x-1)(x-5)Q(x)+ax+b\cdots㉠$$

$f(x)$를 x^2-4x+3으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
$x^2-3x-10$으로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$f(x)=(x^2-4x+3)Q_1(x)+2x-7$$
$$=(x-1)(x-3)Q_1(x)+2x-7$$

$$f(x)=(x^2-3x-10)Q_2(x)+11$$
$$=(x-5)(x+2)Q_2(x)+11$$

이므로 $f(1)=-5$, $f(5)=11$이다.

㉠에서

$f(1)=a+b=-5$

$f(5)=5a+b=11$이므로 연립하여 풀면

$a=4$, $b=-9$

따라서 구하는 나머지는 $4x-9$이다.

44. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 x^2+x+1 으로 나누면 나머지가 9, $f(x)-g(x)$ 를 x^2+x+1 로 나누면 나머지가 -3 이다. 이 때, $f(x)$를 x^2+x+1로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$f(x)+g(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+9$ ·····㉠
$f(x)-g(x)=(x^2+x+1)Q_2(x)-3$ ·····㉡
㉠ + ㉡을 하면
$2f(x)=(x^2+x+1)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}+6$
$f(x)=(x^2+x+1)\dfrac{Q_1(x)+Q_2(x)}{2}+3$
∴나머지는 3

45. $xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$을 인수분해하면?

① $-(x-y)(y-z)(z-x)$ ② $-(x+y)(y-z)(z-x)$

③ $-(x-y)(y+z)(z-x)$ ④ $-(x-y)(y-z)(z+x)$

⑤ $-(x-y)(y+z)(z+x)$

해설

(준 식)$= xy(x-y)+zx(z-x)+yz(y-z)$
$= yx^2-y^2x+z^2x-zx^2+yz(y-z)$
$= (y-z)x^2-(y^2-z^2)x+yz(y-z)$
$= (y-z)x^2-(y+z)(y-z)x+yz(y-z)$
$= (y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$
$= (y-z)(x-y)(x-z)$
$= -(x-y)(y-z)(z-x)$

46. 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형에 대하여 $(a^2+b^2)c+(a+b)c^2=(a+b)(a^2+b^2)+c^3$이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $b=c$인 이등변 삼각형　② a가 빗변인 직각삼각형

③ $a=c$인 이등변 삼각형　④ c가 빗변인 직각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

준식을 c에 관한 내림차순으로 정리하면

$c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+(a+b)(a^2+b^2)$에서

$c^2\{c-(a+b)\}-(a^2+b^2)\{c-(a+b)\}$

$=\{c-(a+b)\}\{c^2-(a^2+b^2)\}$

$=(c-a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$

a ,b ,c 는 삼각형의 세변이므로

$c-a-b\neq 0$이고 $c^2-a^2-b^2=0$

즉 $c^2=a^2+b^2$이므로 c가 빗변인 직각 삼각형이다.

47. $\dfrac{899^3+1}{899\times 898+1}$ 의 양의 약수의 개수는?

① 27 개 ② 25 개 ③ 21 개 ④ 18 개 ⑤ 15 개

해설

$a=899$ 라 치환하면

$$(\text{준 식}) = \frac{a^3+1}{a(a-1)+1}$$

$$= \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$

$$= a+1 = 900$$

$900 = 2^2\times 3^2\times 5^2$

$\therefore$ 900 의 약수의 개수 $= (2+1)\times(2+1)\times(2+1)$

$= 27$

48. 두 실수 a, b에 대하여 $[a,\ b] = a^2 - b^2$라 할 때, $[x^2,\ x-1] + [2x+1,\ 3] + [0,\ 1]$을 인수분해하면 $(x-a)(x^3+x^2+bx+c)$이다. 이 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?

① 5　② 10　③ 15　④ 20　⑤ 25

해설

$$\begin{aligned}
&[x^2,\ x-1] + [2x+1,\ 3] + [0,\ 1] \\
&= x^4 - (x-1)^2 + (2x+1)^2 - 9 + 0 - 1 \\
&= x^4 - x^2 + 2x - 1 + 4x^2 + 4x + 1 - 10 \\
&= x^4 + 3x^2 + 6x - 10 \\
&= (x-1)(x^3 + x^2 + 4x + 10) \\
&= (x-a)(x^3 + x^2 + bx + c)
\end{aligned}$$

따라서, $a = 1$, $b = 4$, $c = 10$이므로

$a + b + c = 15$

49. 두 다항식 $A = x^3 + x^2 + ax - 2, B = x^3 - x^2 - ax + 4$의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

최대공약수를 $x - \alpha$라 하자.
나머지정리에 의해 $\alpha^3 + \alpha^2 + a\alpha - 2 = 0$
$\alpha^3 - \alpha^2 - a\alpha + 4 = 0$
두 식을 더하면 $2\alpha^3 = -2, \quad \alpha = -1$
이제 $\alpha = -1$ 을 다시 A식에 대입하면
$-1 + (-1)^2 - a - 2 = 0 \quad \therefore a = -2$

50. $f(2)=-15$, $g(-2)=5$인 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$의 곱이 $(x+3)^2(x^2+2x-35)$, 최소공배수가 $(x+3)(x^2+3x-35)$일 때, $f(-2)+g(2)$의 값은?

① 8 ② 18 ③ 28 ④ 38 ⑤ 48

해설

곱이 $(x+3)^2(x^2+2x-35)$이고,
최소공배수가 $(x+3)(x^2+3x-35)$이므로
두 이차식은 $(x+3)(x-5)$, $(x+3)(x+7)$
$f(2)=-15$이므로 $f(x)=(x+3)(x-5)$
$g(-2)=5$이므로 $g(x)=(x+3)(x+7)$
$\therefore f(-2)+g(2)=(-2+3)(-2-5)+(2+3)(2+7)$
$=(-7)+45=38$