1. 두 점 A(1, 2), B(−2, 6) 사이의 거리는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}} &= \sqrt{\{1-(-2)\}^2+(2-6)^2} \\ &= \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$

2. 두 점A(2, 3), B(4, 1) 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점P 에 대하여 원점 O 에서 점P 까지의 거리는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 2

해설

x 축 위의 점P 의 좌표를 $P(a, 0)$ 이라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2$

$(2-a)^2 + (3-0)^2 = (4-a)^2 + (1-0)^2$

$a^2 - 4a + 13 = a^2 - 8a + 17$, $4a = 4$, $a = 1$ $\therefore$ $\overline{\mathrm{OP}} = 1$

3. 두 점 A $(-1, 3)$, B $(6, -2)$에 대하여 $\overline{AB}$를 $3 : 2$로 내분하는 점의 좌표는?

① $P\left(-\frac{6}{5}, 0\right)$ ② $P\left(\frac{16}{5}, \frac{4}{5}\right)$ ③ $P\left(\frac{16}{5}, -\frac{1}{5}\right)$
④ $P\left(\frac{3}{5}, 0\right)$ ⑤ $P\left(\frac{16}{5}, 0\right)$

해설

내분점의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{3 \times 6 + 2 \times (-1)}{3+2} = \frac{16}{5}$$

$$y = \frac{3 \times (-2) + 2 \times 3}{3+2} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\therefore P\left(\frac{16}{5}, 0\right)$$

4. 세 점 $A(1,\ -1)$, $B(2,\ 1)$, $C(3,\ 3)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표는?

① $(1,\ 1)$　② $(2,\ 1)$　③ $(3,\ 1)$

④ $(0,\ 1)$　⑤ $(2,\ 2)$

해설

무게중심 $G\left(\dfrac{1+2+3}{3},\ \dfrac{-1+1+3}{3}\right)=(2,\ 1)$

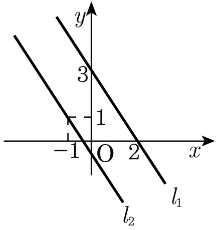
5. 네 점 $O(0,0), A(-3,0), B(4,0), C(2,5)$ 에 대하여 삼각형 AOC 의 넓이는 삼각형 BOC 의 넓이의 몇 배인가?

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\triangle$AOC 와 $\triangle$BOC 의 높이가 같으므로
$\triangle$AOC 와 $\triangle$BOC 의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 비와 같다.
$\overline{AO} : \overline{BO} = 3 : 4$ 이므로 $\triangle$AOC 의 넓이는 $\triangle$BOC 의 넓이의 $\frac{3}{4}$ 배이다.

6. 다음 두 직선 l_1, l_2 가 서로 평행할 때, 직선 l_2 의 기울기는?



① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ -1 ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

l_1 직선의 x 절편, y 절편이 각각 $(2,\ 0)$, $(0,\ 3)$ 이므로,

(l_1 의 기울기)$= -\frac{3}{2}$ 이다.

두 직선 l_1 , l_2 가 서로 평행하므로

(l_2 의 기울기)$= -\frac{3}{2}$

7. $m > 0$ 이고, 두 점 $(m,\ 3)$, $(1,\ m)$ 이 기울기가 m 인 직선 위에 있을 때, m 은?

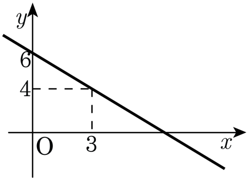
① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

기울기$= \dfrac{m-3}{1-m} = m,\ m^2 = 3$

$\therefore m = \sqrt{3} (\because m > 0)$

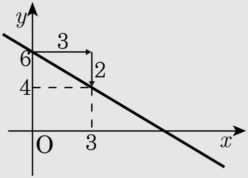
8. 다음 그림의 직선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, $3a + b$ 의 값을 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : $3a + b = 4$

해설



(기울기)$= -\dfrac{2}{3}$ 이므로 $a = -\dfrac{2}{3}$

y 절편이 6 이므로 $b = 6$

따라서 $3a + b = 3 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) + 6 = 4$

9. 세 점 $A(-1, 4)$, $B(0, 1)$, $C(a, -5)$가 한 직선 위에 있도록 a의 값을 정하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

한 직선위에 있으려면 기울기가 같아야 한다.

$$\therefore \quad \frac{4-1}{-1-0} = \frac{1-(-5)}{0-a}$$

$$\Rightarrow \quad a = 2$$

10. $3x+4y-2=0$에 수직이고, 점 $(1,\ 2)$ 를 지나는 직선의 기울기와 y 절편의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

직선 $3x+4y-2=0$ 의 기울기는

$y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$ 에서 $-\frac{3}{4}$

따라서 이 직선의 수직인 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$ 이다.

$y-2=\frac{4}{3}(x-1)$

$\therefore y=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$

11. 직선 $(a-2)y=3(a-1)x-1$ 이 실수 a 의 값에 관계없이 반드시 지나는 사분면은?

① 제 1사분면

② 제 1사분면 또는 제 2사분면

③ 제 2사분면

④ 제 3사분면

⑤ 제 4사분면

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면

$(3x-y)a-3x+2y-1=0$

따라서, $3x-y=0,\ -3x+2y-1=0$ 에서

$x=\frac{1}{3},\ y=1$

주어진 직선은 항상 제 1 사분면 위의 점 $\left(\frac{1}{3},\ 1\right)$ 을 지난다.

12. 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 3 인 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 3$

② $x^2 + y^2 = 1$

③ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3^2$

④ $x^2 + y^2 = 3^2$

⑤ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$

해설

$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2 \Rightarrow \quad \therefore\ x^2 + y^2 = 9$

13. 방정식 $x^2+y^2-2x+4y+4=0$ 이 나타내는 도형을 바르게 설명한 것을 고르면?

① 중심 $(1,\ 2)$ 이고 반지름이 1 인 원

② 중심 $(1,\ -2)$ 이고 반지름이 1 인 원

③ 중심 $(-1,\ 2)$ 이고 반지름이 1 인 원

④ 중심 $(1,\ -2)$ 이고 반지름이 2 인 원

⑤ 중심 $(1,\ 2)$ 이고 반지름이 2 인 원

해설

$x^2+y^2-2x+4y+4=0$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=1$

$\therefore$ 중심은 $(1,-2)$ 이고, 반지름이 1 인 원

14. 평행이동 $(x,\ y)\ \Rightarrow\ (x+a,\ y+4)$ 에 의하여 점$(2,\ 1)$ 이 점 $(1,\ b)$ 로 옮겨질 때, $a+b$ 의 값은?

① -3　　② -1　　③ 2　　④ 4　　⑤ 5

해설

점 $(2,\ 1)$ 이 평행이동 $(x,\ y)\Rightarrow(x+a,\ y+4)$ 에 의하여 옮겨진 점이 $(1,b)$ 이므로

$2+a=1$, $1+4=b$

$\therefore\ a=-1$, $b=5$

$\therefore\ a+b=4$

15. 점 $(2,\ 3)$ 을 x 축, y 축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 P, Q 라 할 때, 점 P, Q 의 좌표는?

① $P(2,\ 3),\ \ Q(-2,\ 3)$
② $P(2,\ -3),\ \ Q(2,\ 3)$
③ $P(2,\ -3),\ \ Q(-2,\ 3)$
④ $P(-2,\ 3),\ \ Q(2,\ -3)$
⑤ $P(3,\ -2),\ \ Q(-3,\ 2)$

해설

점 $(x,\ y)$ 를
1) x 축에 대하여 대칭이동하면 : $(x,\ -y)$
2) y 축에 대하여 대칭이동하면 : $(-x,\ y)$
3) 원점에 대하여 대칭이동하면 : $(-x,\ -y)$
4) 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면
: $(y,\ x)$
점 $(2,\ 3)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점
:$P(2,\ -3)$
점 $(2,\ 3)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한점
:$Q(-2,\ 3)$

16. 점 $(2,4)$ 를 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이동한 다음 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(1,-1)$ ② $(2,\ 0)$ ③ $(4,\ 3)$
④ $(6,\ 4)$ ⑤ $(7,\ 5)$

해설

점 $(2,\ 4)$ 를 직선 $x=3$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(2\cdot 3-2,\ 4)$
즉, $(4,\ 4)$
점 $(4,4)$ 를 다시 x 축의 방향으로 2 만큼
평행이동한 점의 좌표는$(4+2,4)$
즉, $(6,\ 4)$

17. 원 $x^2+y^2-2kx+ky+3k=0$의 중심이 $(4, -2)$일 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{6}$　② $2\sqrt{2}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $4\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심이 $(4, -2)$이므로

$(x-4)^2+(y+2)^2=r^2$

$x^2+y^2-8x+4y+20-r^2=0$ $\cdots$ ㉠

이때, 원 ㉠과 원 $x^2+y^2-2kx+ky+3k=0$이 같으므로

$-2k=-8,\quad k=4$

$3k=20-r^2$

$\therefore k=4,\ r=2\sqrt{2}\ (\because r>0)$

따라서, 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$

18. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2+y^2-2kx+2ky+3k^2-4k+2=0$ 이 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$(x-k)^2+(y+k)^2=-k^2+4k-2 \quad \cdots ㉠$

반지름의 길이가 1 이므로

㉠에서 $-k^2+4k-2=1 \leftarrow r^2=1$

$k^2-4k+3=0, (k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=3$

따라서 합은 4이다.

19. 방정식 $x^2+y^2+4x-6y+k+10=0$ 이 원을 나타내도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

① $k<3$ ② $k>3$ ③ $0<k<3$

④ $k>2$ ⑤ $k<2$

해설

$x^2+y^2+4x-6y+k+10=0$ 을 완전제곱식으로 나타내면 $(x+2)^2+(y-3)^2=3-k$

원이 되려면 반지름이 0 보다 커야 하므로

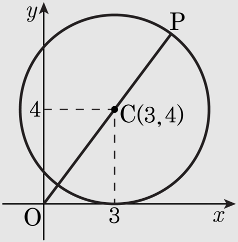
$\sqrt{3-k}>0,\ 3-k>0 \quad \therefore\ k<3$

20. 중심의 좌표가 (3, 4) 이고 x 축에 접하는 원 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은? (단, O 는 원점)

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 9

해설

이 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-4)^2=4^2$
다음 그림과 같이 원의 중심을 C 라 하면
원점과 중심을 지나는 직선이 원과 만나는
두 점 중 한 점을 P 라 할 때,
$\overline{\mathrm{OP}}$ 가 최대이다.
$\therefore\ \overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OC}}+4=\sqrt{3^2+4^2}+4=9$



21. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라
하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서
$(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{C_1C_2}=5$ 이고
두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

22. 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $(1,\ \sqrt{3})$ 에 접하는 접선의 방정식은?

① $x+\sqrt{2}y=4$　② $x+\sqrt{3}y=4$　③ $\sqrt{2}x+y=4$

④ $\sqrt{3}x+y=4$　⑤ $x-\sqrt{3}=4$

해설

$(1,\ \sqrt{3})$이 원 위의 점이므로

$1\cdot x+\sqrt{3}\cdot y=4$

$\therefore x+\sqrt{3}y=4$

23. 기울기가 -1 이고, 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선의 방정식은?

① $y = -x \pm 2$ ② $y = -x \pm 3$ ③ $y = -x \pm 4$

④ $y = -x \pm 2\sqrt{2}$ ⑤ $y = -x \pm 4\sqrt{2}$

해설

구하는 직선의 기울기는 -1 이므로

$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$ 에서

$y = -x \pm 2\sqrt{1 + 1}$

$\therefore\ y = -x \pm 2\sqrt{2}$

24. 다음은 점 $P(a,\ b)$ 의 직선 $y=x$ 에 대해 대칭인 점 Q의 좌표 $(x,\ y)$ 를 구하는 과정이다.
$\boxed{\quad}$ 에 알맞은 말을 차례대로 써 넣어라.

> (1) $\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\dfrac{x+a}{2},\ \dfrac{y+b}{2}\right)$ 은 직선
> $\boxed{\quad}$ 위에 있으므로 $\dfrac{y+b}{2}=\dfrac{x+a}{2}$
> $\therefore x-y=b-a\cdots$①
> (2) 직선 PQ 는 직선 $y=x$ 에 수직이므로
> $\dfrac{y-b}{x-a}=\boxed{\quad}$
> ①, ② 를 연립하여 x , y 를 구하면
> $x=\boxed{\quad}$, $y=\boxed{\quad}$이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

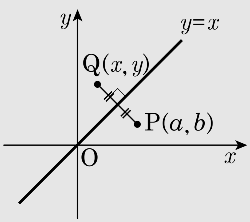
▷ 정답 : $y=x$

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : b

▷ 정답 : a

해설



25. xy 평면 위의 세 개의 직선 $l_1 : x-y+2=0$, $l_2 : x+y-14=0$, $l_3 : 7x-y-10=0$ 으로 둘러싸인 삼각형에 내접하는 원의 중심이 (a,b), 반지름이 r 일 때, $a+b+r^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

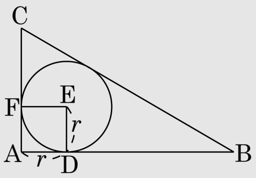
해설

세 직선의 교점을 각각 A, B, C 라 하자. 세 직선 중 두 개의 직선을 각각 연립하여 세 점의 좌표를 구한다.

$A=(6,8)$ $B=(2,4)$ $C=(3,11)$

$\overline{AB}=4\sqrt{2}$, $\overline{BC}=5\sqrt{2}$, $\overline{CA}=3\sqrt{2}$

즉, $\angle CAB=90°$ 인 직각 삼각형이다.



$\Rightarrow$ $3\sqrt{2}-r+4\sqrt{2}-r=5\sqrt{2}$ $\therefore$ $r=\sqrt{2}$

$\therefore$ 점 D는 $\overline{AB}$ 의 $1:3$ 의 내분점이므로,

$$D=\left(\frac{2+18}{4}, \frac{4+24}{4}\right)=(5,7)$$

점 F 는 $\overline{AC}$ 의 $1:2$ 의 내분점이므로,

$$F=\left(\frac{3+12}{3}, \frac{11+16}{3}\right)=(5,9)$$

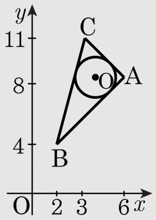
□ADEF 는 정사각형이므로 $\overline{AF} // \overline{DE}$ 이다.

점 A 에서 점 F 로의 이동이 x 축으로 -1, y 축으로 $+1$ 만큼 평행이동이고,

점 D 에서 점 E 로 의 이동도 마찬가지이다.

$\therefore$ $E=(5-1, 7+1)=(4,8)$ $\Rightarrow$ $a+b+r^2=4+8+(\sqrt{2})^2=14$

해설



직선들의 세 교점을 각각 A, B, C 라고 하고 이들의 좌표를 구해보면 A(6,8), B(2,4), C(3,11)

원의 중심의 좌표 O(a, b) 이므로

$2<a<6$, $4<b<11 \cdots$ ㉠

원의 중심으로부터 각 직선에 이르는 거리는 같으므로

$$\frac{|a-b+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|a+b-14|}{\sqrt{2}}=\frac{|7a-b-10|}{5\sqrt{2}}=r \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 ㉠의 조건을 만족시키는 a, b 의 해는 $a=4$, $b=8$ 이고

다시 ㉡에 대입하면, $r=\sqrt{2}$, $\therefore$ $a+b+r^2=14$