1. 두 점 $A(1, 4)$, $B(3, 2)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 x 좌표를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

점 P의 좌표를 $(x\ , 0)$ 이라 하면,
$(\because\ x$축 위의 점은 $y = 0)$
$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$ 이므로
$\sqrt{(x-1)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-3)^2 + 2^2}$
양변을 제곱하여 x 의 값을 구하면
$x^2 - 2x + 1 + 16 = x^2 - 6x + 9 + 4 \therefore\ x = -1$
그러므로 구하는 점 P 의 좌표는 $(-1, 0)$

2. 직선 $x+y=2$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(2,3)$, $\mathrm{B}(3,2)$ 에 이르는 거리가 같은 점 P 의 좌표는?

① $(0,2)$　② $(1,1)$　③ $(2,0)$
④ $(3,-1)$　⑤ $(4,-2)$

해설

점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(a, 2-a)$ 로 놓으면

$\overline{\mathrm{PA}} = \sqrt{(a-2)^2+(2-a-3)^2}$
$= \sqrt{2a^2-2a+5}$

$\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{(a-3)^2+(2-a-2)^2}$
$= \sqrt{2a^2-6a+9}$

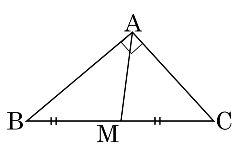
그런데 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$ 에서

$2a^2-2a+5=2a^2-6a+9$

$4a=4$ 에서 $a=1$

$\therefore$ P(1, 1)

3. 다음은 $\angle A = 90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$을 증명한 것이다. 다음 그림과 같이 변 BC의 중점을 M이라 하면



$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{(가)}\left(\overline{BM}^2 + \boxed{(나)}^2\right)$$

이 때, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이고,

$\boxed{(나)} = \boxed{(다)}\overline{BC}$ 이므로

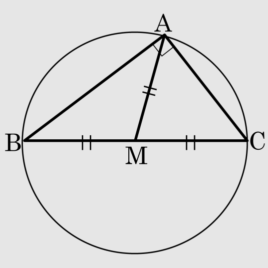
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{(가)}\left(\boxed{(라)}\overline{BC}^2\right) = \overline{BC}^2$$

위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 3 , $2\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$
② 4 , $2\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$
③ 2 , $\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$
④ 2 , $\overline{AM}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{16}{5}$, $\overline{AM}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$

해설

파푸스의 중선정리에 의해



$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{2}\left(\overline{BM}^2 + \boxed{\overline{AM}}^2\right)$$

이 때, $\triangle ABC$는 $\angle A = 90°$인 직각삼각형이므로 점 A는 점 M을 중심으로 하고, 변 BC를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ 이므로 $\boxed{\overline{AM}} = \frac{1}{2}$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\frac{\overline{BC}^2}{4} + \frac{\overline{BC}^2}{4}\right) = \boxed{2}\left(\boxed{\frac{1}{2}}\overline{BC}^2\right) = \overline{BC}^2$$

4. 두 점 A(2, −5), B(−1, 1)에 대해서 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P 의 좌표를 구하면?

① $(0, 0)$ ② $(2, -1)$ ③ $(1, -1)$
④ $(0, -1)$ ⑤ $(1, 0)$

해설
내분점 공식을 이용하면,
$$P = \left(\frac{2 \times (-1) + 1 \times 2}{2 + 1}, \frac{2 \times 1 + 1 \times (-5)}{2 + 1} \right)$$
$\therefore\ (0, -1)$

5. 세 점 $\mathrm{A}(2,\ 4), \mathrm{B}(-2, 0), \mathrm{C}(3, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는?

① $(0, 1)$ ② $(1, 1)$ ③ $(1, 2)$ ④ $(2, 1)$ ⑤ $(0, 1)$

해설

무게중심 구하는 공식을 이용한다.

$$\left(\frac{2+(-2)+3}{3}, \frac{4+0+2}{3}\right) = (1, 2)$$

6. 기울기가 3 이고 점 $(-2,\ 3)$ 을 지나는 직선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오.(단, $a,\ b$ 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

기울기가 3 이고 점 $(-2,\ 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$y = 3(x + 2) + 3 = 3x + 9$

따라서 $a = 3,\ b = 9$

$\therefore\ a + b = 12$

7. x절편이 3이고 y절편이 2인 직선의 방정식은?

① $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ ② $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$ ③ $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}=1$
④ $y=2x+1$ ⑤ $y=3x+2$

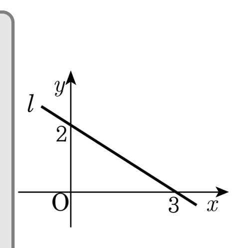
해설

기울기= $\frac{2}{3}$

$y=-\frac{2}{3}x+2$

$\frac{2}{3}x+y=2$

$\therefore\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$



8. 두 직선 $(a-2)x+3y-1=0$, $ax-y+3=0$ 이 서로 수직일 때, a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: -1

▷ 정답: 3

해설

$(a-2)a+3(-1)=0$
$a^2-2a-3=0$, $(a-3)(a+1)=0$
$\therefore\ a=-1$ 또는 3

9. 두 그래프 $kx+y=-3$과 $2x+(k-1)y=6$이 만나지 않을 때, 상수 k의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

두 그래프가 만나지 않으므로,

연립방정식 $\begin{cases} kx+y=-3 & \cdots\cdots\cdots ㉠ \\ 2x+(k-1)y=6 & \cdots\cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해는 없다.

즉, 위의 방정식을 x에 대하여 정리하면

㉠ $\times (k-1)-$ ㉡에서 $(k^2-k-2)x=-3(k+1)$

$\therefore\ (k-2)(k+1)x=-3(k+1)$

여기서, $k=2$이면 $0\cdot x=-9$이므로

연립방정식의 해가 없다.

따라서 구하는 k의 값은 $k=2$

(다른 풀이) 두 직선이 평행하기 위한 조건은

$$\frac{2}{k}=\frac{k-1}{1}=\frac{6}{-3}$$

$\therefore k=2$

10. 점 $(4,5)$ 와 직선 $3x-4y-2=0$ 사이의 거리를 구하면?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

거리 $d = \dfrac{|3\cdot 4 - 4\cdot 5 - 2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$

$= \dfrac{10}{5} = 2$

11. 두 직선 $4x+3y-1=0$ 과 $4x+3y+5=0$ 과의 거리를 d 라 할 때 $5d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

직선 $4x+3y-1=0$ 위의 한 점 이를테면 $(1, -1)$ 로부터 직선 $4x+3y+5=0$ 에 이르는 거리를 구하면 되므로

$$\frac{|4\times1+3\times(-1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{6}{5}$$

$$\therefore 5d=5\times\frac{6}{5}=6$$

12. 방정식 $x^2+y^2-4x+2y-11=0$ 은 어떤 도형을 나타내는가?

① 중심이 (2, 1) 이고 반지름의 길이가 1 인 원
② 중심이 (2, −1) 이고 반지름의 길이가 2 인 원
③ 중심이 (−2, 1) 이고 반지름의 길이가 2 인 원
④ 중심이 (2, −1) 이고 반지름의 길이가 4 인 원
⑤ 중심이 (−2, 1) 이고 반지름의 길이가 4 인 원

해설
$x^2+y^2-4x+2y-11=0$
$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y+1)^2=16$
$\therefore$ 중심은 $(2,\ -1)$ 이고,
반지름은 4 이다.

13. 방정식 $x^2+y^2+2x=0$ 이 나타내는 도형의 넓이를 구하면?

① 3π ② 2π ③ π ④ $\frac{1}{2}\pi$ ⑤ $\frac{1}{3}\pi$

해설

(준식) : $(x+1)^2+y^2=1$
중심 $(-1,\ 0)$, 반지름의 길이가 1 인 원이므로 넓이는 π

14. 점 (5, 1)과 (−1, 7)을 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y-2)^2=12$
② $(x-2)^2+(y-1)^2=15$
③ $(x-2)^2+(y-4)^2=18$
④ $(x-2)^2+(y-6)^2=21$
⑤ $(x-4)^2+(y-6)^2=25$

해설

두 점의 중점을 C라 하면 $C(2,4)$
구하는 원의 반지름의 길이는
$r=\sqrt{(2-(-1))^2+(4-7)^2}=\sqrt{18}$
$\therefore\ (x-2)^2+(y-4)^2=18$

15. 방정식 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은? (단, $a,\ b,\ c$ 는 모두 0 이 아니다.)

① $b^2-4c=0$　　② $b^2+4c=0$

③ $a^2-4c=0$　　④ $a^2+b^2-4c=0$

⑤ $a^2+b^2+4c=0$

해설

주어진 방정식과 y 축과의 교점을 구하려면,
주어진 방정식에 $x=0$ 을 대입하면 되므로
$y^2+by+c=0$ $\cdots\cdots$ ㉠
원이 y 축과 접하려면 ㉠의
식이 중근을 가져야 하므로 판별식 $D=0$
$\therefore\ D=b^2-4c=0$

16. 점 $(3,\ -4)$를 점 $(0,\ 2)$로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(2,\ -3)$이 옮겨지는 점의 좌표는?

① $(5,\ -9)$ ② $(3,\ -7)$ ③ $(1,\ -5)$
④ $(-1,\ 3)$ ⑤ $(-3,\ 5)$

해설

$(3,\ -4)$를 $(0, 2)$로 옮기는 평행이동은
x축으로 -3, y축으로 $+6$만큼 이동을 한다.
따라서 점 $(2, -3)$이 옮겨지는 점의 좌표는
$(2-3, -3+6) = (-1, 3)$

17. 점 $\mathrm{P}(3, -4)$를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 P' 이라 할 때, 선분 PP' 의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

점 $\mathrm{P}(3, -4)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점
P' 의 좌표는 $(3, 4)$ 이므로
$\overline{\mathrm{PP}'} = \sqrt{(3-3)^2 + (-4-4)^2} = 8$

18. 좌표평면 위의 점 A 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A′ , 점 A′ 을 다시 원점에 대하여 대칭이동한 점을 A″ 이라고 할 때, 점 A″ 은 점 A 를 어떻게 이동한 것과 같은가?

① 원점에 대한 대칭이동

② x 축에 대한 대칭이동

③ y 축에 대한 대칭이동

④ 직선 $y = x$ 에 대한 대칭이동

⑤ 직선 $y = -x$ 에 대한 대칭이동

해설

점 A 를 (x, y) 라 하면,
A′ 는 $(y,\ x)$, A″ 는 $(-y, -x)$ 라 할 수 있다.
따라서 점 A″ 은 점 A 를
직선 $y = -x$ 에 대해 대칭이동시킨 것과 같다.

19. 방정식 $x^2+y^2+Ax+By=0$ 이 나타내는 원의 중심이 $(-2,-3)$ 일 때, 상수 A, B 의 값과 반지름의 길이를 바르게 나열한 것은?

① 2, 3, $\sqrt{2}$　② 3, 7, 5　③ 4, 4, $\sqrt{9}$
④ 4, 6, $\sqrt{13}$　⑤ 5, 9, 11

해설

중심이 $(-2,-3)$ 이고 반지름의 길이가
r 인 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y+3)^2=r^2$
$x^2+y^2+4x+6y+13-r^2=0$
이것이 $x^2+y^2+Ax+By=0$ 과 일치해야 하므로
$A=4, B=6, 13-r^2=0$
$13-r^2=0$ 에서
$r=\sqrt{13}$ $(\because r>0)$
따라서, $A=4, B=6$ 이고
반지름의 길이는 $\sqrt{13}$ 이다.

20. 세 점 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$을 지나는 원의 방정식이 $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ (단, $r > 0$)라고 할 때, $a+b+r$ 의 값을 구하면?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

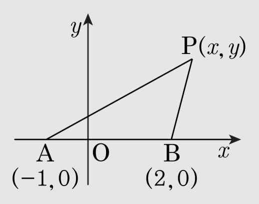
해설

구하는 원의 방정식을
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 으로 놓는다.
세 점 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$은
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$
위의 점이므로 등식이 성립한다.
따라서 세 점을 대입한 식을 연립시키면
구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2-2x=0$ 이다.
$x^2+y^2-2x=0$ 을 정리하면
$(x-1)^2+y^2=1$ 이다.
따라서 $a=1$, $b=0$, $r=1$ 이므로
$a+b+r=2$ 이다.

21. 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ 4

해설



조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 P(x, y) 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

$2\overline{BP} = \overline{AP}$

$\therefore\ 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

그런데 $\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$4\left\{(x-2)^2 + y^2\right\} = \left\{(x+1)^2 + y^2\right\}$

정리하면 $(x-3)^2 + y^2 = 4$

따라서 원의 반지름은 2 이다.

22. 두 원 $x^2+y^2=a^2$, $(x-3)^2+(y+4)^2=4$가 만나지 않을 조건은? (단, $a>0$)

① $0<a<3$
② $3<a<7$
③ $a>7$
④ $0<a<3$ 또는 $a>7$
⑤ $2<a<7$ 또는 $a>7$

해설

두 원의 중심이 각각 $(0,\ 0)$, $(3,\ -4)$이므로
두 원의 중심거리 d는 $d=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$
(i) 두 원이 서로 외부에 위치할 때
$d=5>a+2$
$\therefore\ 0<a<3$
(ii) 한 원이 다른 원의 내부에 위치할 때
$d=5<|a-2|$
$\therefore a>7\ (\because\ a>0)$
(i), (ii) 에서 $0<a<3$ 또는 $a>7$

23. 원 $x^2+y^2=4$ 에 접하고 기울기가 $-\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y=-\sqrt{2}x\pm 1$ ② $y=-\sqrt{2}x\pm 5$ ③ $y=-\sqrt{3}x\pm 4$
④ $y=-\sqrt{3}x\pm 9$ ⑤ $y=-\sqrt{5}x\pm 6$

해설

구하는 접선의 방정식은

$y=\left(-\sqrt{3}\right)x\pm 2\sqrt{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2}$

$\therefore y=-\sqrt{3}x\pm 4$

24. 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = 3$ 에 대하여 대칭이동한 다음 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 점은 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = b$ 에 대하여 대칭이동한 점과 같다. 이때, 상수 b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

(i) 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = 3$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2 \cdot 3 - 1)$ 즉, $(5, 5)$
점 $(5, 5)$ 를 다시 y 축의 방향으로 4 만큼
평행이동한 점의 좌표는 $(5, 5 + 4)$
즉, $(5, 9)$

(ii) 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = b$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2b - 1)$

(i), (ii)로부터 $2b - 1 = 9$ $\quad \therefore b = 5$

25. 점 P $(2,\ 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R 라 할 때, 세 점 P, Q, R 를 세 꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점 P $(2, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한

점 Q 는 Q $(2, -1)$

또, 점 P $(2, 1)$ 을 원점에 대하여

대칭이동한 점 R 는 R $(-2, -1)$

따라서, 다음 그림에서 세 점

P $(2, 1)$, Q $(2, -1)$, R $(-2, -1)$ 을

꼭짓점으로 하는$\triangle PQR$ 의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$