

5. 연립부등식 $\begin{cases} 4(2-x) \leq 5 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} > 1 \\ 2x-3 \leq 5 \end{cases}$ 을 풀면?

- ① $\frac{3}{4} < x \leq 4$ ② $1 < x \leq 4$ ③ $\frac{3}{4} \leq x < 1$
 ④ $\frac{3}{4} \leq x < 4$ ⑤ $1 \leq x < 4$

해설

$$\begin{cases} 4(2-x) \leq 5 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} > 1 \\ 2x-3 \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ x > 1 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\therefore 1 < x \leq 4$$

6. 다음 연립부등식을 풀면?

$$2x - 3 < 3x + 1 \leq 5x - 3$$

- ① $x \leq 1$ ② $x \geq 2$ ③ $x \geq 1$ ④ $x \leq 2$ ⑤ $x \geq 3$

해설

$$\begin{cases} 2x - 3 < 3x + 1 \\ 3x + 1 \leq 5x - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$\therefore x \geq 2$$

7. 연립부등식 $\begin{cases} 2x+7 \geq 3x \\ x \geq a \end{cases}$ 을 만족하는 정수가 3개일 때, a 의 값의 범위는?

▶ 답 :

▷ 정답 : $4 < a \leq 5$

해설

$2x+7 \geq 3x$ 를 풀면 $x \leq 7$ 이다.

$a \leq x \leq 7$ 을 만족하는 정수 3 개가 존재하려면 $4 < a \leq 5$ 이다.

8. 다음 연립부등식 중에서 해가 없는 것을 모두 고르면?

①

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

②

$$\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x > 2 \end{cases}$$

③

$$\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$$

④

$$\begin{cases} x < -3 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

⑤

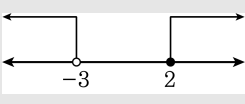
$$\begin{cases} x < 0 \\ x > -1 \end{cases}$$

해설

②, ④ : 해가 없다.

② $\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x > 2 \end{cases}$ 에서 $x \leq -1$ 또는 $x > 2$ 이다.

④ $\begin{cases} x < -3 \\ x \geq 2 \end{cases}$



① $x = 3$

③ $x < -1$

⑤ $-1 < x < 0$

9. 연립부등식 $2x + a < x + 2 < 4(x - 1)$ 의 해가 $b < x < 5$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -5

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$$2x + a < x + 2 < 4(x - 1)$$

$$2x + a < x + 2 \rightarrow x < 2 - a$$

$$x + 2 < 4(x - 1) \rightarrow x > 2$$

$$2 < x < 2 - a \text{ 가 } b < x < 5 \text{ 이므로 } a = -3, b = 2$$

$$\therefore a + b = -1$$

10. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-1 < 5 \\ 5-x \leq a+3 \end{cases}$ 이 해를 가질 때, a 의 값의 범위를 구하면?

① $a < 5$

② $a \leq 5$

③ $a > -1$

④ $a < -1$

⑤ $a \geq -1$

해설

i) $2x-1 < 5, x < 3$

ii) $5-x \leq a+3, x \geq 2-a$

$2-a < 3$

$\therefore a > -1$

11. 연속하는 세 홀수 a, b, c 는 $20 < (a - c)^2 + b < 22$ 을 만족한다고 한다. $2a - b + c$ 의 값은?

① 10

② 9

③ 8

④ 7

⑤ 6

해설

a, b, c 가 연속하는 세 홀수이므로 $a - c = -4$,

$$20 < (-4)^2 + b < 22$$

$$20 < 16 + b < 22$$

$$4 < b < 6$$

따라서, b 값은 5 가 되고 연속하는 세 홀수는 3, 5, 7 이다.

$$\therefore 2a - b + c = 6 - 5 + 7 = 8$$

12. 이차함수 $y = -x^2 + ax - 2$ 의 그래프가 x 축보다 항상 아래쪽에 있을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

② $-\frac{3\sqrt{2}}{2} < a < \frac{3\sqrt{2}}{2}$

③ $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$

④ $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$

⑤ $-\frac{\sqrt{2}}{3} < a < \frac{\sqrt{2}}{3}$

해설

모든 실수 x 에 대하여 $-x^2 + ax - 2 < 0$

즉 $x^2 - ax + 2 > 0$ 이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2 - ax + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 8 < 0$$

$$(a + 2\sqrt{2})(a - 2\sqrt{2}) < 0$$

$$\therefore -2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$$

13. 부등식 $ax^2 + 5x + b > 0$ 을 풀어서 $2 < x < 3$ 이라는 해가 구해졌다.
이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = 6$

해설

$$ax^2 + 5x + b > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

해가 $2 < x < 3$ 이 되는 이차부등식은

$$(x - 2)(x - 3) < 0 \text{ 전개하면}$$

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

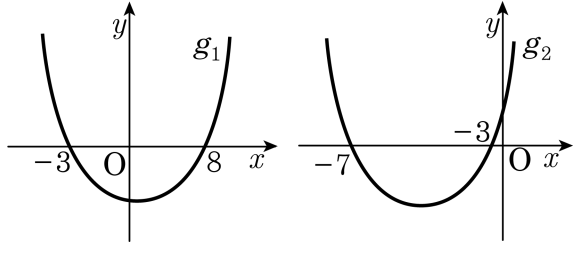
㉠과 일차항의 계수를 맞추기 위해

양변에 -1 을 곱하면

$$-x^2 + 5x - 6 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a = -1$, $b = -6$

14. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
 g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
 g_2 의 일차항 $a = 10$
($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5$)
이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
 $x^2 + 10x - 24 < 0, (x + 12)(x - 2) < 0$
 $\therefore -12 < x < 2$
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

15. 다음 연립방정식의 해가 $4 < x \leq 6$ 이 되도록 실수 a 의 값의 범위를 정할 때, a 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0 \\ x^2 - (a + 6)x + 6a \leq 0 \end{cases}$$

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$$x^2 - 6x + 8 > 0 \text{ 에서}$$

$$(x - 2)(x - 4) > 0$$

$$\therefore x < 2 \text{ 또는 } x > 4$$

$$x^2 - (a + 6)x + 6a \leq 0 \text{ 에서}$$

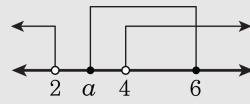
$$\Rightarrow (x - a)(x - 6) \leq 0$$

$$\therefore \text{ 두 부등식의 공통부분이 } 4 < x \leq 6 \text{ 이 되려면}$$

$$(x - a)(x - 6) \leq 0 \text{ 의 해가 } a \leq x \leq 6 \text{ 이어야 하고,}$$

$$2 \leq a \leq 4 \text{ 이어야 한다}$$

$$\therefore a \text{ 의 최솟값 : } 2, \text{ 최댓값 : } 4$$



16. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

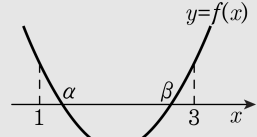
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a + 4)(a - 4) > 0$
 $\therefore a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$
 $f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \frac{13}{3}$
 $\therefore a < \frac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
 $x = \frac{a}{2}$ 이므로 $1 < \frac{a}{2} < 3$
 $\therefore 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4, \beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

17. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax + 6 - a = 0$ 의 모든 실근이 모두 1보다 클 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $3 < a \leq 7$

② $-3 \leq a < 7$

③ $-7 < a \leq -3$

④ $a \leq 3$ 또는 $a > 7$

⑤ $a < -7$ 또는 $a \geq -3$

해설

이차함수 $f(x) = x^2 + 2ax + 6 - a$ 의 그래프를 생각하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 6 + a \geq 0, \quad (a+3)(a-2) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -3, a \geq 2 \cdots \textcircled{1}$$

$$f(1) = 1 + 2a + 6 - a > 0$$

$$\therefore a > -7 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{대칭축 } x = -a \text{ 에서 } -a > 1$$

$$\therefore a < -1 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{의 공통범위는 } -7 < a \leq -3$$

18. 커다란 상자 안에 600 개가 안 되는 파란 구슬과 빨간 구슬 개수가 3 : 5 의 비로 들어있다. 여기에 파란 구슬과 빨간 구슬을 x 개씩 집어넣었더니, 파란 구슬과 빨간 구슬의 개수의 비가 7 : 11 이 되었고, 구슬은 총 개수는 650 개를 넘었다. 이 때 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

처음의 파란 구슬과 빨간 구슬의 수를 각각 $3y$ 개, $5y$ 개 라 하면
그 합이 600 개가 안 되므로

$$3y + 5y < 600 \quad \therefore y < 75$$

파란 구슬과 빨간 구슬을 x 개씩 집어넣었더니, 파란 구슬과 빨간 구슬의 개수의 비가 7 : 11 이 되었으므로

$$(3y + x) : (5y + x) = 7 : 11 \quad \therefore y = 2x$$

구슬이 650 개를 넘었으므로

$$(3y + x) + (5y + x) > 650$$

$$8y + 2x > 650 \text{ 에서 } 9y > 650 \quad \therefore y > 72.\overline{x}$$

$$\therefore 72.\overline{x} < y < 75$$

한편 $y = 2x$ 이므로 y 는 짝수이다.

따라서 $y = 74$ 이므로

$$\therefore x = 37$$