1. 연립부등식 $\begin{cases} x-4<2x+1 \\ 3x+6 \geq -1+4x \end{cases}$ 를 풀어라.

① $5<x\leq 7$ ② $-5<x,\ 7\leq x$ ③ $-5<x\leq 7$
④ $-7\leq x<5$ ⑤ $-7\leq x<-5$

해설

$\begin{cases} x-4<2x+1 \\ 3x+6 \geq -1+4x \end{cases}$ $\begin{cases} x>-5 \\ x\leq 7 \end{cases}$

$\therefore\ -5<x\leq 7$

2. 연립부등식 $\begin{cases} 5-x>1 \\ x+3<2x \end{cases}$ 를 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3<x<4$

해설

$\begin{cases} 5-x>1 \\ x+3<2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x>-4 \\ -x<-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<4 \\ x>3 \end{cases}$

$\therefore\ 3<x<4$

3. 다음은 연립부등식 $2x-4 \le -x+2 < 2x+1$ 를 세 친구가 각각 풀이한 것이다.
다음 중 풀이 과정을 틀린 친구는 누구인지 찾아라.

<지윤>
$2x-4 \le -x+2 < 2x+1$ 을 나누어 풀면
① $2x-4 \le -x+2$
$2x+x \le 2+4$
$3x \le 6$
$x \le 2$
② $-x+2 < 2x+1$
$-x-2x < 1-2$
$-3x < -1$
$x > \frac{1}{3}$
$\vdots$

<미진>
$2x-4 \le -x+2 < 2x+1$ 의 각 변에 $2x$ 를 빼면
$-4 \le -3x+2 < 1$ 이다.
그리고 각 변에 2를 뺀 후 각 변에 -3으로 나누면
$-6 \le -3x < -1$
$\frac{1}{3} < x \le \frac{6}{3}$
$\vdots$

<동호>
$2x-4 \le -x+2 < 2x+1$ 을 나누어 풀면
① $2x-4 \le -x+2$
$2x+x \le 2+4$
$3x \le 6$
$x \le 2$
② $2x-4 < 2x+1$
$\vdots$

▶ 답 :

▷ 정답 : 동호

해설

(풀이) 지윤이의 풀이와 미진이의 풀이는 제대로 풀었다. 동호의 풀이는
②
$2x-4 < 2x+1$
부분을 $-x+2 < 2x+1$ 로 고쳐서 풀어야 한다.

4. 부등식 $-1 < -2x + 1 < 3$ 의 해를 구하면?

① $-2 < x < 2$ ② $-2 < x < -1$ ③ $-1 < x < 1$
④ $-1 < x < 2$ ⑤ $1 < x < 2$

해설

$-1 < -2x + 1 < 3 \rightarrow \begin{cases} -1 < -2x + 1 \\ -2x + 1 < 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases}$

$\therefore\ -1 < x < 1$

5. 연립부등식 $-2 < 3x + 4 \le 11$ 를 만족하는 정수를 모두 구하면?

① $-1,\ 0,\ 1$　② $0,\ 1,\ 2$　③ $-1,\ 0,\ 1,\ 2$
④ $-2,\ -1,\ 0,\ 1$　⑤ $0,\ 1,\ 2,\ 3$

해설

$$\begin{cases} -2 < 3x + 4 \\ 3x + 4 \le 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \le \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

따라서 $-2 < x \le \dfrac{7}{3}$ 을 만족하는 정수는 : $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ 이다.

6. 부등식 $-1 < -2x + 1 < 3$ 의 해는?

① $-2 < x < 2$ ② $-2 < x < -1$ ③ $-1 < x < 1$
④ $-1 < x < 2$ ⑤ $1 < x < 2$

해설

$-1 < -2x + 1 < 3$

$\Rightarrow \begin{cases} -1 < -2x + 1 \\ -2x + 1 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases}$

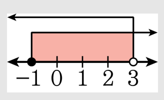
$\therefore\ -1 < x < 1$

7. 부등식 $-5 \le 2x-3 < 3$ 을 만족하는 정수는 모두 몇 개인가?

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

$-5 \le 2x-3 < 3$



$\Rightarrow \begin{cases} -5 \le 2x-3 \\ 2x-3 < 3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x \le 2 \\ 2x < 6 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x < 3 \end{cases}$　$\therefore$ $-1 \le x < 3$ 을 만족하는 정수

따라서 $-1, 0, 1, 2$ 이므로 4 개이다.

8. 다음 부등식의 해가 없을 때, 상수 m의 값의 합은?

$$m^2x-1>m(x-1)$$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$m^2x-1>m(x-1)$ 에서

$m^{2x}-1>mx-m$

$\therefore (m^2-m)x>1-m\cdots$㉠

㉠의 해가 없어야 하므로

$m^2-m=0,\ 1-m\geq 0$

$m^2-m=0$에서 $m(m-1)-0$

$\therefore m=0$ 또는 $1\cdots$㉡

$1-m\geq 0$에서 $m\leq 1\cdots$㉢

따라서 ㉡, ㉢에서 $m=0$ 또는 $m=1$

9. 두 부등식 $3(x-10) < -x+5$, $\frac{x-12}{4} \leq \frac{x-2}{3} + \frac{7}{12}$ 를 동시에 만족하는 해는?

① $-35 < x \leq \frac{35}{4}$ ② $-35 \leq x < \frac{35}{4}$ ③ $-30 < x \leq \frac{35}{4}$
④ $-30 < x \leq 35$ ⑤ $-25 < x \leq 35$

해설

i) $3(x-10) < -x+5$
$3x - 30 < -x + 5$
$x < \frac{35}{4}$
ii) $\frac{x-12}{4} \leq \frac{x-2}{3} + \frac{7}{12}$ 의 양변에 12 를 곱하면
$3(x-12) \leq 4(x-2) + 7$
$3x - 36 \leq 4x - 8 + 7$
$x \geq -35$
$\therefore -35 \leq x < \frac{35}{4}$

10. x의 범위가 -1, 0, 1, 2일 때, 다음 부등식 중 해가 <u>없는</u> 것은?

① $2x < -4$ ② $x + 3 < 4$ ③ $3x - 2 \leq 1$
④ $-x + 6 \geq 7$ ⑤ $2x - 3 \geq -1$

해설

① $x < -2$
② $x < 1$
③ $x \leq 1$
④ $x \leq -1$
⑤ $x \geq 1$

11. 연립부등식 $1 < -\frac{x-a}{3} < 2$ 의 해가 $1 < x < b$ 일 때, $a-b$ 의 값은?

① 1　　② 3　　③ 7　　④ 9　　⑤ 11

해설

$1 < -\frac{x-a}{3} < 2$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 < -\frac{x-a}{3} \\ -\frac{x-a}{3} < 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x < a-3 \\ a-6 < x \end{cases}$

$a-6=1 \qquad \therefore\ a=7$

$a-3=b \qquad \therefore\ b=4$

$\therefore\ a-b=7-4=3$

12. 200 원짜리 자두와 500 원짜리 복숭아를 합하여 9 개를 사는데, 그 값이 2800 원 이상 3600 원 이하가 되게 하려고 한다. 복숭아는 최대 몇 개까지 살 수 있는가?

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

자두의 개수 : $(9-x)$ 개 , 복숭아의 개수 : x 개

$2800 \le 200(9-x)+500x \le 3600$

$$\begin{cases} 2800 \le 200(9-x)+500x \\ 200(9-x)+500x \le 3600 \end{cases}$$

$\therefore \ \frac{10}{3} \le x \le 6$

따라서 살 수 있는 복숭아의 최대 개수는 6 개이다.

13. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(m+2)x^2-2(m+2)x+4>0$이 항상 성립하도록 할 때, 상수 m의 값의 범위에 속한 정수의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

모든 실수 x에 대하여 성립하기 위해서는
$m \geq -2$
$D/4=(m+2)^2-4(m+2)<0$이므로
$m^2+4m+4-4m-8=m^2-4<0$
따라서 $-2 \leq m < 2$이므로
만족하는 정수 m의 개수는
$-2,\ -1,\ 0,\ 1$의 4개

14. 부등식 $ax^2+(a+1)x+a \geq 0$을 만족하는 실수 x가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a>1$　　② $a<-\frac{1}{3}$　　③ $a \geq -\frac{1}{3}$
④ $a \leq -\frac{1}{3}$　　⑤ $-\frac{1}{3}<a<1$

해설

$ax^2+(a+1)x+a \geq 0$을 만족하는 실수가 존재하는 경우는
전체에서 모든 실수 x에 대하여
$ax^2+(a+1)x+a<0$인 경우를 제외하면 된다.
$ax^2+(a+1)x+a<0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면
$a<0 \cdots$ ㉠
또, 이차방정식 $ax^2+(a+1)x+a=0$의 판별식을 D라 할 때,
$D=(a+10)^2-4a^2<0,\ -3a^2+2a+1<0$
$3a^2-2a-1>0,\ (3a+1)(a-1)>0$
$\therefore a<-\frac{1}{3}$ 또는 $a>1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a<-\frac{1}{3}$
따라서 $ax^2+(a+1)x+a \geq 0$을 만족하는 실수가 존재하려면
$a \geq -\frac{1}{3}$이면 된다.

15. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $kx^2-2(k-4)x+2 \geq 0$이 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k \leq -2$　　② $-1 \leq k \leq 2$　　③ $1 \leq k \leq 8$

④ $2 \leq k \leq 8$　　⑤ $k \leq 8$

해설

x^2의 계수가 미지수 k이므로

ⅰ) $k=0$일 때 $8x+2 \geq 0$에서 $x \geq -\frac{1}{4}$이므로

모든 실수 x에 대하여 성립하는 것은 아니다.

ⅱ) $k \neq 0$일 때 $kx^2-2(k-4)x+2 \geq 0$의 해가 모든 실수이려면

$k > 0 \cdots$ ㉠

$\frac{D}{4}=(k-4)^2-2k \leq 0,\ k^2-10k+16 \leq 0,$

$(k-2)(k-8) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq x \leq 8 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2 \leq k \leq 8$

ⅰ), ⅱ)에서 $2 \leq k \leq 8$이다.

16. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x^2 - 4x < 5 \end{cases}$$

▶ 답:

▷ 정답: $-1 < x < 2$

해설

부등식 $x^2 - 4 < 0$에서 $(x+2)(x-2) < 0$

$\therefore -2 < x < 2 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2 - 4x < 5$에서 $x^2 - 4x - 5 < 0$

$(x+1)(x-5) < 0$

$\therefore -1 < x < 5 \cdots\cdots$ ㉡

따라서 구하는 해는 ㉠과 ㉡를

동시에 만족하는 x의 값이므로

$\therefore -1 < x < 2$

17. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-1 < x+1 < x^2-3x+1 \\ x+3 > -x+2 \end{cases}$ 의 해가 $a < x < b$ 일 때, $2a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{cases} \underbrace{x^2-1 < x+1}_{(가)} \overbrace{}^{} \underbrace{ < x^2-3x+1}_{(나)} \\ x+3 > -x+2 \cdots (다) \end{cases}$$

(가)에서 $x^2-x-2<0, (x-2)(x+1)<0$

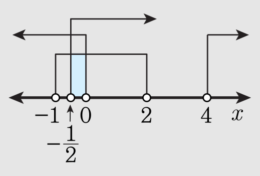
$\therefore -1 < x < 2$

(나)에서 $x^2-4x>0, x(x-4)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>4$

(다)에서 $2x>-1$

$\therefore x > -\frac{1}{2}$



$-\frac{1}{2} < x < 0$

따라서 $a=-\frac{1}{2}, b=0$이므로 $2a+b=-1+0=-1$

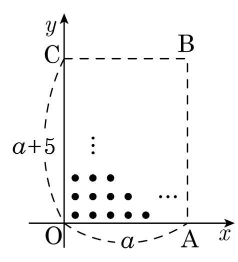
18. 이차부등식 $x^2-|x|-6<0$의 해가 $a<x<b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

① 5　② 10　③ 13　④ 16　⑤ 18

해설

$x \geqq 0$일 때
$x^2-x-6<0$에서 $(x+2)(x-3)<0$
$-2<x<3$　　$\therefore 0 \leqq x<3$
$x<0$일 때
$x^2+x-6<0$에서 $(x+3)(x-2)<0$
$-3<x<2$　　$\therefore -3<x<0$
$\therefore -3<x<3$이므로 $a=-3,\ b=3$
따라서 $a^2+b^2=9+9=18$

19. 다음 그림과 같이 원점을 모서리로 하고, $\overline{\mathrm{OA}} = a$, $\overline{\mathrm{OC}} = a + 5$ 인 직사각형 OABC 가 있다. 사각형 OABC 내부의 격자점의 수가 50 개 이하가 되도록 할 때, a 의 최댓값은? (단, $a > 0$ 이고, 격자점은 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점이다.)



① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

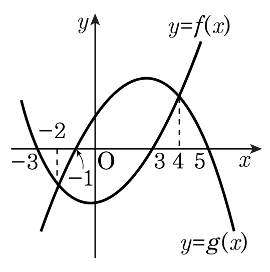
해설

$(a-1)(a+4) \leq 50$

$a^2 + 3a - 54 = (a+9)(a-6) \leq 0$

$\therefore 0 < a \leq 6$

20. 두 이차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음의 그림과 같을 때, $f(x)g(x) > 0$ 의 해는?



① $x < -1$ 또는 $x > 3$

② $x < -1$ 또는 $4 < x < 5$

③ $-3 < x < -1$ 또는$3 < x < 5$

④ $-3 < x < -2$ 또는 $4 < x < 5$

⑤ $-2 < x < -1$ 또는 $3 < x < 5$

해설

$f(x)g(x) > 0$ 에서 $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ 또는 $f(x) < 0$, $g(x) < 0$
(i) $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ 을 만족하는 x 의 값의 범위는 $3 < x < 5$
(ii) $f(x) < 0$, $g(x) < 0$ 을 만족하는 x 의 값의 범위는 $-3 < x < -1$
따라서 (i), (ii) 에 의하여 구하는 부등식의 해는 $-3 < x < -1$ 또는 $3 < x < 5$

21. 세 변의 길이가 $x-1,\ x,\ x+1$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a < x < b$라 할 때, 방정식 $ax^2-3x+b=0$의 두 근의 곱은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x-1,\ x,\ x+1$은 삼각형의 세 변이므로

$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$, $x-1+x>x+1 \therefore\ x>2$ ……㉠

한편, 둔각삼각형이 되려면

$(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$

$x^2-4x<0$에서 $0<x<4$……㉡

㉠, ㉡에서 $2<x<4$

$\therefore a=2,\ b=4$

따라서 $ax^2-3x+b=0$의 두 근의 곱은

$\frac{b}{a}=\frac{4}{2}=2$

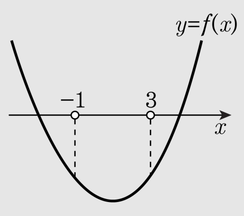
22. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0,\ f(3) \le 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \le 0,\ k+3 \le 0$
$\therefore k \le -3$
(ii) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \le 0,\ 9k+3 \le 0$
$\therefore k \le -\frac{1}{3}$
(i), (ii) 에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3 이다.

23. 부등식 $(x-2)(ax-1)<0$의 해에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 이 부등식의 해가 존재하지 않는 실수 a가 있다.
② $a=0$이면 이 부등식의 해는 $x<2$이다.
③ $a<0$이면 이 부등식의 해는 $\frac{1}{a}<x<2$이다.
④ $a>0$이면 이 부등식의 해는 $x<2$이다.
⑤ ①, ②, ③, ④ 모두 거짓이다.

해설

① $a \neq 0$일 때

$(x-2)(ax-1)=a(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)$이므로

$a=\frac{1}{2}$이면 이 부등식의 해는 없다.

② $a=0$이면 이 부등식은 $-(x-2)<0$,
즉 $x-2>0$이므로 해는 $x>2$이다.

③ $a<0$이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)>0$이므로

$x<\frac{1}{a}$ 또는 $x>2$이다.

④ $a>0$이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0$이므로

$a<\frac{1}{2}$일때, $2<x<\frac{1}{a}$,

$a>\frac{1}{2}$일때 $\frac{1}{a}<x<2$이다.

24. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근은 -1과 0 사이에 있고, 다른 근은 0과 2 사이에 있을 때 정수 $a,\ b$에 대하여, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x)=x^2+ax+b$ 라고 놓을 때

$$\begin{cases} f(-1)=1-a+b>0 & \cdots ① \\ f(0)=b<0 & \cdots ② \\ f(2)=4+2a+b>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①$\times 2+$③하면 $6+3b>0$

$\therefore\ b>-2$

이것과 ②에서 $-2<b<0$

$\therefore\ b=-1$ ($\because\ b$는 정수)

이 값을 ①, ③에 대입하면

$1-a-1>0,\ 4+2a-1>0$

$\therefore\ -\frac{3}{2}<a<0$

$\therefore\ a=-1$ ($\because\ a$는 정수)

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ a+b=-2$

25. 이차방정식 $ax^2 - (a-3)x + a - 2 = 0$이 적어도 한 개의 정수근을 갖도록 하는 정수 a값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

이차방정식이므로 $a \neq 0$이고
실근을 가지므로
$D = (a-3)^2 - 4a(a-2) \geq 0$
$3a^2 - 2a - 9 \leq 0$
$\therefore \ \frac{1 - \sqrt{28}}{3} \leq a \leq \frac{1 + \sqrt{28}}{3}$
$-1.\times\times\cdots \leq a \leq 2.\times\times\cdots$ 이므로
a의 정수값은 $-1, \ 0, \ 1, \ 2$
그런데 $a \neq 0$이고 $a = 1$일 때는 정수근이 없다.
$\therefore \ a = -1, \ 2$이고 구하는 합은 1