1. $-3a-2<-3b-2$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a<b$

② $-3a>-3b$

③ $5a-3>5b-3$

④ $3-a>3-b$

⑤ $\dfrac{a}{3}<\dfrac{b}{3}$

해설

$-3a-2<-3b-2\cdots$ ㉠

(㉠ $+\,2)\div(-3)$하면, $a>b$이다.

따라서 만족하는 식은 $5a-3>5b-3$

2. $a > b > 1$ 인 실수 a, b 에 대하여 다음 중 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ② $\frac{a}{1-a} > \frac{b}{1-b}$ ③ $a+3 < b+3$
④ $a-1 < b-1$ ⑤ $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$

해설

① 양변에 ab 를 곱하면 주어진 조건과 다르게 나온다.
② $1-a < 0, 1-b < 0$에서 $(1-a)(1-b) > 0$이므로
양변에 $(1-a)(1-b)$를 곱하면
$a(1-b) > b(1-a)$, $a-ab > b-ab$, $a > b$
주어진 조건에 만족한다.
③ 양변에 3을 빼주면 주어진 조건에 만족하지 않는다.
④ 양변에 1을 더해주면 주어진 조건에 만족하지 않는다.
⑤ $1+a > 0, 1+b > 0$ 이므로 $(1+a)(1+b)$ 를 양변에 곱하면
$a(1+b) < b(1+a)$
$a+ab < b+ab$
$a < b$
주어진 조건을 만족하지 않는다.

3. $3x+y=1$이고 $1 \le x \le 5$일 때, y의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -20 ② -16 ③ -12 ④ -8 ⑤ 4

해설

$x=\dfrac{1-y}{3}$이므로 $1 \le x \le 5$에 대입하면

$1 \le \dfrac{1-y}{3} \le 5,\ 3 \le 1-y \le 15$

$2 \le -y \le 14$

$\therefore -14 \le y \le -2$

따라서 y의 최댓값은 -2, 최솟값은 -14이므로 합은 -16

4. 다음 중 연립부등식 $\begin{cases} 2x-3<7 \\ 5x+4 \geq x \end{cases}$ 의 해를 모두 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 4　⑤ 5

해설

$$\begin{cases} 2x-3<7 \cdots ㉠ \\ 5x+4 \geq x \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ 에서 $2x<10$, $x<5$

㉡ 에서 $4x \geq -4$, $x \geq -1$

$\therefore \ -1 \leq x < 5$

5. 다음을 연립부등식으로 나타낸 것 중 옳은 것은?

어떤 수 x 에서 4를 빼면 10 보다 작고, x 의 3 배에 3 를 더하면 22 보다 작지 않다.

① $\begin{cases} x-4<10 \\ 3x+3>22 \end{cases}$

② $\begin{cases} x-4<10 \\ 3x+3<22 \end{cases}$

③ $\begin{cases} x-4<10 \\ 3x+3\geq 22 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x-4>10 \\ 3x+3<22 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} x+4<10 \\ 3x-3\geq 22 \end{cases}$

해설

$$\begin{cases} x-4<10 \\ 3x+3\geq 22 \end{cases}$$

문제의 뜻에 맞게 세운다.

6. 연립부등식 $\begin{cases} x-4<2x+1 \\ 3x-6 \le 3 \end{cases}$ 를 풀면?

① $5<x\le 7$ ② $-5<x\le x7$ ③ $-5<x\le 3$

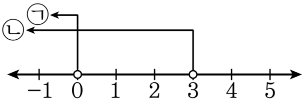
④ $-3\le x<5$ ⑤ $-7\le x<-5$

해설

$$\begin{cases} x-4<2x+1 \\ 3x-6 \le 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-5 \\ x \le 3 \end{cases}$$

$\therefore\ -5<x\le 3$

7. 다음은 연립부등식 $\begin{cases} ax+b<0 \cdots ㉠ \\ cx+d>0 \cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해를 수직선 위에 나타낸 것이다. 이 때, 연립부등식의 해를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $x<0$

해설

$x<0$ 과 $x<3$ 의 공통부분이 연립부등식의 해이다.

$\therefore\ x<0$

8. 연립부등식 $-2 < 3x + 4 \leq 11$ 을 만족하는 정수를 모두 구하여라.

① $-1,\ 0,\ 1$　② $0,\ 1,\ 2$　③ $-1,\ 0,\ 1,\ 2$

④ $-2,\ -1,\ 0,\ 1$　⑤ $0,\ 1,\ 2,\ 3$

해설

$$\begin{cases} -2 < 3x + 4 \\ 3x + 4 \leq 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \leq \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

따라서 $-2 < x \leq \dfrac{7}{3}$ 을 만족하는 정수는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ 이다.

9. 부등식 $4 - x \le 3x - 4 < 2x + 2$ 를 풀면?

① $x \le 2$　　② $x \ge 2$　　③ $2 \le x < 6$

④ $x \le 6$　　⑤ $x \ge 6$

해설

$4 - x \le 3x - 4 < 2x + 2$

$$\rightarrow \begin{cases} 4 - x \le 3x - 4 \\ 3x - 4 < 2x + 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -x - 3x \le -4 - 4 \\ 3x - 2x < 2 + 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -4x \le -8 \\ x < 6 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x < 6 \end{cases}$$

$\therefore\ 2 \le x < 6$

10. 연립부등식 $-5 \leq 2x - 1 < 3$ 의 해가 $a \leq x < b$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

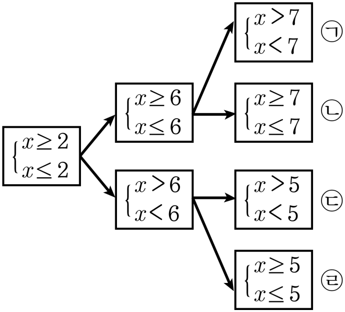
$-5 \leq 2x - 1 < 3$

$-4 \leq 2x < 4$,　$-2 \leq x < 2$

$a = -2,\ b = 2$

$\therefore a + b = 0$

11. 다음은 해가 각각 다른 연립부등식이다. 출발점의 연립부등식과 같은 해의 개수를 가지는 방향으로 갈 때, 도착하는 곳은 어디인지 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

해설

$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases}$ 는 해가 한 개이므로 한 개 있는

$\begin{cases} x \geq 6 \\ x \leq 6 \end{cases}$ 쪽으로 간다.

같은 방법으로 $\begin{cases} x \geq 7 \\ x \leq 7 \end{cases}$ 쪽으로 가게 된다.

그러므로 도착하는 곳은 ㉡ 이다.

12. 부등식 $|x-1|+|x+2|<9$를 만족하는 정수 x의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

(i) $x<-2$일 때

$-(x-1)-(x+2)<9$

$-x+1-x-2<9,\ x>-5$

$\therefore -5<x<2$

(ii) $-2\le x<1$일 때

$-(x+1)+x+2<9,\ -x+1+x+2<9$

$0\cdot x<6$이므로 $-2\le x<1$인 범위의 모든 x는 주어진 부등식의 해가 된다.

$\therefore -2\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때,

$(x-1)+(x+2)<9,\ x<4$

$\therefore 1\le x<4$

(i), (ii), (iii)에서 해는 $-5<x<4$

따라서 정수는 8개

13. 연립부등식 $\begin{cases} 3x^2+4x-4 \geq 0 \\ (x+1)^2 < 4 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 < x \leq -1,\ \frac{2}{3} < x < 1$
② $-1 < x \leq -3,\ \frac{2}{3} \leq x < 2$
③ $-2 < x \leq 0,\ \frac{1}{3} < x < 1$
④ $-3 < x \leq -2,\ \frac{2}{3} \leq x < 1$
⑤ $-4 < x \leq -2,\ \frac{1}{3} < x < 1$

해설

$\begin{cases} 3x^2+4x-4 \geq 0 \cdots \text{(가)} \\ (x+1)^2 < 4 \cdots \text{(나)} \end{cases}$

(가)에서 $(x+2)(3x-2) \geq 0$이므로

$x \leq -2$ 또는 $x \geq \frac{2}{3}$

(나)에서 $-2 < x+1 < 2$,

$-3 < x < 1$이므로

$-3 < x \leq -2,\ \frac{2}{3} \leq x < 1$

14. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$의 해를 구하면?

① 해가 없다

② $x = 3$

③ $x \neq 3$인 모든실수

④ $-3 < x < 3$

⑤ 모든 실수

해설

$(x-3)^2 \geq 0$, (실수)$^2 \geq 0$이므로

$\therefore$ ⑤ 모든실수

15. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2 + 2ax - 4 \geq 0$이 성립하지 않을 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $-4 \leq a \leq 0$

② $0 \leq a < 1$ 또는 $a > 3$

③ $-4 < a$

④ $-4 < a \leq 0$

⑤ $0 \leq a \leq 4$

해설

모든 실수 x에 대해 주어진 식이 성립하지 않으려면
$a \leq 0$이고 $D/4 = a^2 + 4a < 0$이어야 한다.
따라서 $a(a+4) < 0$이므로 $-4 < a < 0$이고
$a = 0$일 때도 성립하지 않으므로 $-4 < a \leq 0$

16. 모든 실수 x에 대하여 x^2+ax+a가 -3보다 항상 크기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $-4<a<3$　② $-2<a<4$　③ $-2<a<6$

④ $2<a<4$　⑤ $2<a<6$

해설

$x^2+ax+a>-3$, $x^2+ax+(a+3)>0$

모든 실수 x에 대하여 성립하려면

이차방정식 $x^2+ax+(a+3)=0$의 판별식을

D라 할 때,

$D<0$이어야 하므로

$D=a^2-4(a+3)<0$

$a^2-4a-12<0$, $(a-6)(a+2)<0$

$\therefore -2<a<6$

17. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+2ax+3>0$이 성립하도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

x의 계수가 미지수이므로

ⅰ) $a=0$일 때,

$3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.

ⅱ) $a\neq 0$일 때,

$ax^2+2ax+3>0$의 해가 모든 실수이려면

$a>0 \cdots$ ㉠

$\frac{D}{4}=a^2-3a<0,\ a(a-3)<0$

$\therefore 0<a<3 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<a<3$

ⅰ), ⅱ)에서 $0\leq a<3$

따라서 정수 a는 0, 1, 2의 3개이다.

18. 모든 실수 x, y에 대하여 $\sqrt{mx^2 - mx + 2}$가 0이 아닌 실수가 될 실수 m의 값의 범위는?

① $0 < m < 4$ ② $4 \le m \le 8$ ③ $0 \le m < 8$

④ $4 < m \le 8$ ⑤ $m \ge 8$

해설

$\sqrt{mx^2 - mx + 2}$가 0이 아닌 실수가 되려면 $mx^2 - mx + 2 > 0$이어야 한다.

ⅰ) $m = 0$일 때 $0 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 2 > 0$이므로
모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.

ⅱ) $m \ne 0$일 때 $mx^2 - mx + 2 > 0$가
모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면
$m > 0 \cdots$ ㉠
또 이차방정식 $mx^2 - mx + 2 = 0$의 판별식을
D라 할 때
$D = (-m)^2 - 8m < 0,\ m(m-8) < 0$
$\therefore 0 < m < 8 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0 < m < 8$
ⅰ), ⅱ)에서 $0 \le m < 8$

19. 부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $0<\alpha<x<\beta$ 일 때 부등식 $cx^2-bx+a>0$ 의 해는?

① $x<-\frac{1}{\alpha}$ 또는 $x>-\frac{1}{\beta}$
② $x<-\frac{1}{\beta}$ 또는 $x>\frac{1}{\alpha}$
③ $-\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$
④ $\frac{1}{\alpha}<x<\frac{1}{\beta}$
⑤ $\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\alpha<x<\beta$ 이므로

$a<0$ 이다. 해가 $0<\alpha<x<\beta$ 이고

이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$

양변에 a 를 곱하면

$a(x-\alpha)(x-\beta)>0$

$ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta>0$

$\therefore\ b=-a(\alpha+\beta),\ c=a\alpha\beta$

따라서 $cx^2-bx+a>0$ 에 대입하면

$a\alpha\beta x^2+a(\alpha+\beta)x+a>0$

$\alpha\beta x^2+(\alpha+\beta)x+1<0$

$(\alpha x+1)(\beta x+1)<0$

$\therefore -\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}\ (\because 0<\alpha<\beta)$

20. 부등식 $|x-2|<k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8| \le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k>0$)

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8| \le 8$을 풀면

$-8 \le x^2-8 \le 8$

$0 \le x^2 \le 16$

$\therefore -4 \le x \le 4$

$k>0$이므로 부등식 $|x-2|<k$ 을 풀면

$-k < x-2 < k$

$-k+2 < x < k+2$

이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8| \le 8$을 만족하려면

$-k+2 \ge -4,\ k+2 \le 4$이어야 하므로

$k \le 6,\ k \le 2$

$\therefore 0 < k \le 2$

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

21. 다음 이차부등식 중 해가 존재하지 않는 것은?

① $2x^2 - 6x + 1 \le 0$

② $x^2 - 2x - 3 < 0$

③ $x^2 - x + 1 > 0$

④ $x^2 - 6x + 9 > 0$

⑤ $4x^2 - 4x + 1 < 0$

해설

① $(x - \frac{3-\sqrt{7}}{2})(x - \frac{3+\sqrt{7}}{2}) \le 0$

$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{7}}{2} \le x \le \frac{3+\sqrt{7}}{2}$

② $(x+1)(x-3) < 0 \;\; \Rightarrow -1 < x < 3$

③ $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \;\; \Rightarrow x$ 는 모든 실수

④ $(x-3)^2 > 0 \Rightarrow x \ne 3$ 인 모든 실수

⑤ $(2x-1)^2 < 0 \Rightarrow$ 해는 없다

22. 다각형의 내각의 합이 $600°$ 이상 $750°$ 이하일 때, 이 다각형은 몇 각형인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 육각형

해설

다각형의 내각의 합: $180°(n-2)$

$600° \leq 180°(n-2) \leq 750°$

$600° \leq 180°n - 360° \leq 750°$

$960° \leq 180°n \leq 1110°$

$5.3\cdots \leq n \leq 6.16\cdots$

$\therefore n = 6$

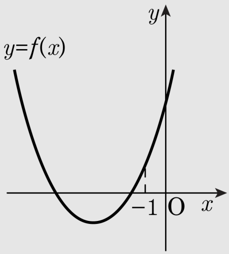
23. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\dfrac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서
$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$
$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$

(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\dfrac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$
이상에서 $-7<k<-3$
따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

24. 어느 회사가 판매하고 있는 상품의 1개당 판매 가격을 작년보다 x% 올리면 이 상품의 판매량이 작년보다 $\frac{x}{2}$%감소한다고 한다. 이 회사가 올해 판매 금액의 10%를 상여금으로 지급할 때, 올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액이 작년 판매 금액보다 크거나 같게 되기 위한 x의 최댓값은?

① 60 ② $\frac{200}{3}$ ③ $\frac{230}{3}$ ④ 80 ⑤ 90

해설

이 회사가 판매하는 상품의 작년 1개당 판매 가격을 a, 판매량을 b라 하자.

올해 판매 가격을 x%올리면

올해 판매 가격은 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$,

판매량은 $b\left(1-\frac{x}{200}\right)$ 이므로

올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액은

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\times\frac{9}{10}$$

작년 판매 금액이 ab이므로

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\times\frac{9}{10}\geq ab$$

이 부등식을 정리하면

$$9x^2-900x+20000\leq 0$$

$$(3x-100)(3x-200)\leq 0$$

$$\therefore \frac{100}{3}\leq x\leq\frac{200}{3}$$

25. x, y, z는 실수이고, 두 관계식 $x+y+z=2, 2x^2-yz=4$를 만족시킨다. 이 때 $xy+yz+zx$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$y+z=2-x,\ \ yz=2x^2-4$에서

y, z를 두근으로 하는 이차방정식은

$t^2-(2-x)t+2x^2-4=0$이므로

$D=(2-x)^2-4(2x^2-4)\geq 0$

$\therefore\ \ -2\leq x\leq \dfrac{10}{7}$

따라서 $xy+yz+zx=yz+(y+z)x$

$=(2x^2-4)+(2-x)x$

$=(x+1)^2-5$에서 $x=-1$일 때 최솟값 -5